●特集／数楽のたのしみ・数学のよろこび

中高生たちと楽しむ実験数楽［上］*1

矢崎成俊

「みなさん，こんにちは．実験数楽者の周布岳(すふ・たける)です．今日は一緒に楽しみましょう．どうぞよろしくお願いします」

——有名な中高一貫校から講演を依頼された岳は，大講堂の壇上から，聴衆の中学・高校の生徒たちに向かって挨拶をはじめた．

「講演タイトルは，『いかにして困難な問題に立ち向かうか』というお堅いものですが，手を動かし，脳に汗かき，数学の考え方を実感しながら，問題への取り組み方をお話します．みなさんにも手を動かしてもらいますし，道具が全員分ないので，代表でみなさんのお友達に壇上で手伝ってもらいます．お呼びしましょう．アシスタントの井上大智くんです！　拍手!!　……」

——井上大智は数学が大好きな中学3年生．舞台の袖から登場した．当日に決めたので，彼が登場することを知っている人はほとんどおらず，おっ，井上だ！　なんでなんで，などと会場は楽しそうに沸き立った．大智は指定された場所に着席した．机の上には，講演で使うであろう，書画カメラ，ペットボトル，ドミノ，ルービックキューブ，空き缶，箱，紙の帯などが置いてある．

「大智くんどうぞよろしくお願いします．——講演をはじめましょう」

——周布岳は最初の図1を見せた．

図1　困難な問題たち

＊1　本稿は，2019年11月30日に清真学園高等学校・中学校の清真学園SSH科学講演会における講演「いかにして困難な問題に立ち向かうか.」の発表スライドを修正・加筆したものです．本文で登場する仮想アシスタントの井上大智くんと同様，当時中学3年生だったD.I.君？　伊藤大地くん？　に講演の実験アシスタントを務めてもらいました．

「ぼくらの前には，立ちはだかるいくつもの困難な問題があります．——論点といってもよいです．図1は，思いつくままに列挙したものです．個人レベルのものから，日本の国家レベル，全世界，地球全体レベルの問題までさまざま混在していますね．図1以外にも，身近には勉強，部活，恋愛，就職，結婚，……などの問題があります．まぁ，問題というと大げさだし，響きが悪いですが……，どうにかしなきゃならないこと程度でもよいです．——程度の差はあっても，これらを全部《問題》とひとくくりで言ってしまいましょう．今日の目標は，自分の，日本の，世界の，地球の問題——困難な問題——を少しでも解決するために必要なことは何か，を考えることです．——そして，数学のチカラを使おうというのが提案です．そのための心得を●●個，実験を●●個紹介します」

◎—心得 1. 考えることを放棄しない

【ウォーミングアップ実験 1】　最後はみんな……

「ウォーミングアップしましょう．みなさん，左手を前に出して，左手の人差し指を握る，あるいは指してください．大智くんは，机の上にあるリングを人差し指にはめて，書画カメラを使ってみんなに見せて下さい(図2)」

——聴衆の生徒たちは左手を前に出して，人差し指を握っている．大智もリングをはめて，書画カメラでスクリーンに映している．岳はその様子を確認した後，次のように説明した．

（1）　好きな名前の文字数分だけ握る指(あるいはリング)を移動させる．これを2回連続しておこなう．動く方向はどちらの方向でもよいが，隣の指に移動し，指を飛ばしてはならない．親指，もしくは小指に到達したら，折り返す．

（2）　最後に，今の指から小指方向に，「好き」の二文字分だけ移動する．

「大智くん，今リングがかかっている指は？」

「薬指です」

——大智は左手の薬指を書画カメラにかざしながら答えた(図3)．

岳はみなを見回して，

「みなさんはどうでしたか．薬指を握っていますね．他の指を握っている人は……，もう一度，確認しながら，ゆっくり動かしてください……．指を飛ばさないようにね……．最後は薬指，になったでしょうか．——なぜでしょう」

岳は大智の方をみたが，大智は考え中だった．岳はみなに向かって，

「からくりは，後ほど説明しましょう．数学のちょっとした考えを使うとすぐに説明できます．次の話に移ります．——困難な問題といえば……，SDGs という言葉を聞いたことがあると思います．恐らく，中学校や高校の授業のほとんどの科目で SDGs 絡みの話を一度は聞いているのではないでしょうか」

岳が反応を促したら，大智や聴衆の半分くらいは首肯した．

——SDGs(Sustainable Development Goals，日本語では「持続可能な開発目標」)は，2015 年ニューヨーク国連本部において開催された「持続可能な開発サミット」の成果文書「我々の世界を変革する：持続可能な開発のための 2030 アジェンダ」の具体的な指針である．ここで，アジェンダ(agenda)とは，行動計

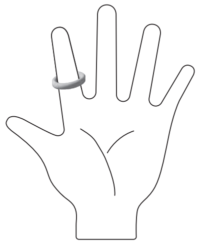


図 2　リングをはめた左手の人差し指

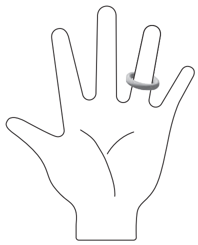


図 3　リングをはめた左手の薬指

画や課題のことを指す．SDGs は，2000 年から 2015 年の目標として掲げられた，ミレニアム開発目標（Millennium Development Goals, MDGs）の後継である．MDGs が途上国のための目標（8 ゴール，21 ターゲット）であったのに対して，SDGs はすべての国のための目標（17 ゴール，169 ターゲット）であり，この点が最大の変革点といえよう．地球温暖化などは先進国の産業革命や大国の経済優先の施策が要因であることは明らかなのだから，当然の変革である．アジェンダの前文に，「我々はこの共同の旅路に乗り出すにあたり，誰一人取り残さないこと（no one will be left behind）を誓う」とある．——本当にそうだとよいなぁ，と思いながら岳は話を続けた．

「図 4 が，2030 年までの達成目標としている SDGs の 17 のゴールです．各ゴールに下に 169 のターゲットがあり，延べ 244 の具体的な指標が掲げられています．貧困や飢餓，エネルギー，気候変動，平和的社会など，思いつく困難な問題は，大抵この中に含まれている——含めることができる——はずです」

図 4　世界を変えるための 17 の目標

「ここでみなさんに考えてほしいのですが，因数分解ができると貧困がなくなるのでしょうか……．微分積分ができると不平等がなくなるのでしょうか……」

——岳は一呼吸おいて，

「当然，直接的にすぐには繋がりません．ここで言いたいことは，問題解決に使えるものは何でも使おうという精神です——スウガクも！　次の実験をやってみましょう」

【実験 2】　123456707654321 の素因数分解

岳は，パソコンのコンソール画面を立ち上げて，あらかじめ作っておいた与えられた整数を素因数分解するプログラムを立ち上げた．

「これは，素因数分解のプログラムです．123456707654321 を素因数分解してみましょう．15 桁あります．大智くん，この数の大きさはわかりますか」

「…… 123 兆 4567 億 765 万 4321 です」

——大智は桁を数えて丁寧に答えた．

「はい．その通り！　この 123 兆……を自作のプログラムで素因数分解します．今プログラムを実行します．はい，スタート！　少し時間がかかるので，待って

いる間に話を進めましょう」

——我々は毎日のようにインターネットを利用していて，個人情報の入力を要求されることが頻繁にある．そしてその際，パスワードが要求される．パスワードは，他人に知られてはならないから，パスワードは暗号化される．暗号はどのように保護されているのか．なんと！　まったく関係なさそうな「素因数分解は簡単にできないこと」を逆手にとって，パスワードは暗号化されているのだ．

——まだ，実行中の素因数分解は終了していない．この素因数分解プログラムは，与えられた数を小さい素数から順に割れるだけ割っていく——最初は2で割れるだけ割って，次は3で割れるだけ割って——という素朴なものである．だから，その数が巨大な素数の積だとすると，その巨大な素数にたどり着くまでに，何回も割り切れない割り算をし続けなければならない．さらに，ある素数がわかっても，その次の素数を知る術はない．時間がかかるわけだ．

「まだ終わりませんねぇ．素因数分解のプログラムは裏で走らせておいて，次の話をしましょう」

——岳は，みんなに右の図5を見せた．

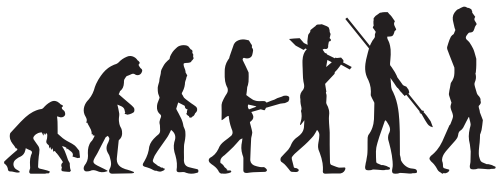


図5　サルからヒトへ

「ヒトはサルから進化したと言われていますが，ヒトはいつからヒトになったのでしょう……．代表して大智くん，いつからだと思いますか．特に，正解はないですので，思いついたところを言って下さい」

「……火を使ってからですか？　そんな映画を見たことがあります」

「はい．一般的に動物は火を嫌うわけですが，その火を制御できる技と知恵を身につけたときにヒトが誕生した，というのは，実用的だし，具体的でもっともですね」

——こんなことを言う人もいる．数や対応を発見してからではないか，と．例えば，獲物が数頭いる．それぞれの獲物に石を一個ずつ対応させて獲物を数えたこともあったのでは，と想像できる．もちろん証拠はない．あるいは，骨に刻みを入れて数えれば，骨を携帯して，別の場所に持って行ける．実際，刻みの入った骨はいくつも発掘されている．——こうした，数や対応が発見されたときにヒトが誕生した，というのは，抽象的だし，説得力もある．しかし，岳は第3の理由を述べた……．

図6　市販の加圧ポンプ

「火や数(対応)は，もっともな理由なのですが，ぼくは『質』を考えることを自覚してからだと思っています．質とは何でしょうか．——次の実験をしてみましょう」

【実験3】　雲をつくる

「大智くん，机の上に，少し液体の入ったペットボトルと炭酸が抜けないように加圧するポンプがあります(図6)……．

——そのポンプをペットボトルにくっつけて，シュポシュポと加圧してください．そして，底の方だけを振ってください(図7)」

「……はい．もうこれ以上，ポンプを押せません．ペットボトルはパンパンです」

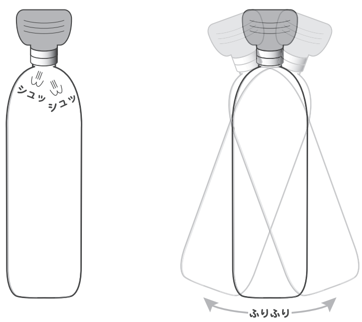


図7　ペットボトル内部を加圧

——リハーサルなしのぶっつけ本番だったが，大智は淡々と実験アシスタントをこなしてくれている．とてもありがたい．

「では大智くん．ぼくが，はい！　って言ったら，ポンプのレバーを押して下さい．ペットボトル内部の圧力が一気に減圧されます．——さぁ，みんなさんは，大智くんの持っているペットボトルの中に注目してください……．いきますよぉ……．大智くん，はい！」

「おぉ……」

会場がどよめいた．きょとんとしている生徒もいる．加圧によりペットボトル内部の圧力は 1.5 気圧ほどに上がり，内部の温度も室温(23℃程度)から 30℃くらいまで上昇する(断熱圧縮)．少し置いて室温程度まで下がってから，開栓して一気に減圧すると，体積は急速に増加し(断熱膨張)，温度は 10℃ほど急速に低下する．そうして，露点温度に達し雲ができる．ペットボトルの中の少量の液体は市販のエタノールである．水でもよいのだが，水よりも気化する温度が低いので雲がよくできる．マッチや線香の煙をペットボトルの中に入れておくと，凝結核が増えるからより雲が出来やすい．

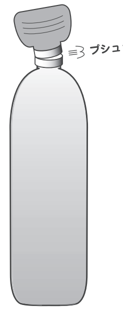


図 8　一気に減圧

「いわゆる雲が出来る原理をペットボトルの中で再現しました．みなさんが，おぉーとなったその気持ちの奥には，きっと『なんで？』とか『すごい』とか『意表を突かれた』とかの感情の揺れがあったはずです．それらは奥底にある質が感情として表面化したものだと，その質を自覚することがヒトの始まりなんだと，そう考えるわけです」

——言うなれば，ヒトになる以前には，「生き死に」しかなかったわけだが，質を自覚してから，単なる生死が，「どう生きるか」に質的に変容し，そうして，文化が育まれ，文明が発展してきた……．

「質を自覚すると，また新たな問題が発生します．上で見てきたような，個人レベルから，コミュニティーレベル，地球レベルのさまざまな『問題』です．問題に正解はありません．でも，答えないといけない．——だから，『心得 1．考えることを放棄しない』のです」

◎—心得 2. コンピュータは人が使うもの

「さて，話題は変わりますが，ぼくはこんな級数——等比級数——が好きです．なぜって，直観的に気持ちの良い理解ができますから」

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots=1$$

岳はこう言って，図 9 を見せた．

——この等比級数の第 n 部分和は，

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$$

であり，図に表すと，図 10 となる．

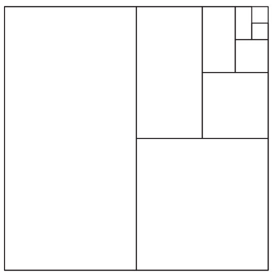


図 9　半分半分を無限に足すと 1 になる

——各図の下の百分率は，全体を 100% としたときの S_n の割合である．S_n には大きな特徴が二つある．

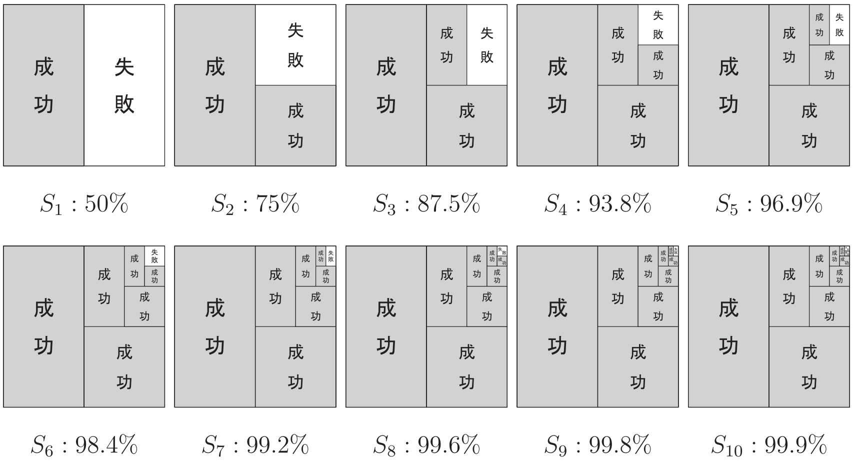


図 10　半分半分半分……の部分和

特徴 1　S_4 で全体の 90% を超え，S_7 で全体の 99% を超える．さらに，S_{10} で全体の 99.9% を超える．だから，いつも半分だけしか成功しなくても，10 回続ければ，ほとんど達成！

特徴 2　極限を考えると $\lim_{n\to\infty} S_n = 1$ となる(図 9)．しかし，現実――パソコンでの計算――は，

$$(S_{53})_2 = (1.\underbrace{11\cdots1}_{52\text{桁}})_2 \times 2^{-1} \qquad \text{だから，} S_{53} < 0.\underbrace{99\cdots9}_{16\text{桁}}$$

$$(S_{54})_2 = (1.\underbrace{00\cdots0}_{52\text{桁}})_2 \times 2^{0} = 1 \quad \text{だから，} S_{54} = 1$$

である($(a)_2$ は，a の 2 進法による表現)．言うなれば，努力はせいぜい 54 回まででいいのである．こうなる理由は，コンピュータにおける実数は，2 進法による浮動小数点数という数に変換され，かつ無限の桁数を扱えないという制約による．

岳は，ここまで説明して，みんなに問いかけた．

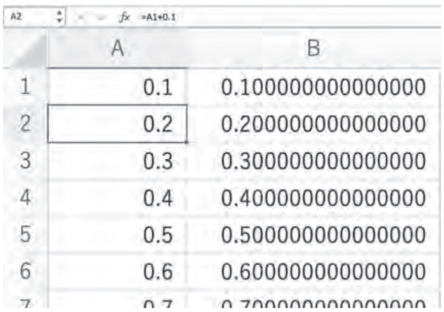
「コンピュータにおける数は，通常の実数とどのように違うのでしょうか．電卓やスマホやパソコンで行う計算は本当に正しい計算をしているのでしょうか．――というと心配になりますよね．残念ながら，その心配は杞憂ではなく現実であることを，表計算ソフトを用いて実験してみましょう」

【実験 4】　表計算ソフトで 0.1 を 100 回足す

次の手順に従って，エクセルなどの表計算ソフトで 0.1 を 100 回足す．

（1）　**A** 列を，セルの書式設定で小数点以下 1 桁で表示させるようにする．

（2）　図 11 のように，最初のセル **A1** を 0.1 にして，以降 **A2**～**A100** まで，上から下に向かって順次 0.1 を足していく．


A2　fx =A1+0.1

	A	B
1	0.1	0.100000000000000
2	0.2	0.200000000000000
3	0.3	0.300000000000000
4	0.4	0.400000000000000
5	0.5	0.500000000000000
6	0.6	0.600000000000000
7	0.7	0.700000000000000

図 11　**A** 列は小数点以下 1 桁で，**B** 列は小数点以下 15 桁で表示(最初の方)

（3） **B** 列を，セルの書式設定で小数点以下 15 桁で表示させるようにする．そして，**B** 列も **A** 列と同様の計算をする．

図 11 のように，**A** 列も **B** 列も，順調に 0.1 が足されていく．

しかし，図 12 のように，ある時点から B 列の数値がおかしくなる．セル **B60** で本来 6.0 のはずが 5.999…90 となり，以降 **B100** まで真の値とは異なる値が表示されている．一方，**A** 列の数値は，予想通り 100 番目のセル **A100** には 0.1×100 の結果 10.0 が表示されている．

岳が，表計算ソフトで実演してみせると，大智から，生徒みんなから，そして，後ろで見ていた先生からも，「えぇー」という声――と，心の声――が聞こえてきた．

「これは一体何がおきているのでしょう」

岳は，聴衆のざわめきに負けないように，少しお腹に力を入れて，説明を始めた．

「実は，0.1 は入力した時点でもはや厳密には 0.1 ではないのです．なぜならば，コンピュータにおける数はすべて 2 進法による数として扱われます．それは，電流が流れるか流れないか，オンとオフの二つ状態に対応 1 と 0 を対応させているからです．――だからまず，入力した 0.1 を 2 進法によって表現しなくてはなりません．そうすると，

$$0.1=(1.\underbrace{1001\ 1001\ \cdots\ 1001\ \cdots}_{\text{無限の続く桁}})_2\times 2^{-4}$$

のように無限に続く数となります．――次に，コンピュータは無限の桁を扱えないから，例えば，最後の桁を 0 捨 1 入して，

$$0.1'=(1.\underbrace{1001\ 1001\ \cdots\ 1001\ 1010}_{52\text{桁}})_2\times 2^{-4}$$

という有限桁の値にします――丸めるといいます――．こうして得られた数を正規化された倍精度の 2 進浮動小数点数といいます．――結局，0.1 は入力した時点で 0.1′ のような数になるので，もはや厳密には 0.1 ではないのです」

大智や生徒たちは，少し狐につままれた感じにも見えたが……，岳はかまわず続けた．

「詳しい仕組みは分からずとも，0.1 を 100 回足して 10.0 にならなかったのは事実です．――重要なことは，コンピュータは，いい加減に計算をしているわけではなく，実数とは異なる数を厳密なルールのもとで計算をしていることです．――そうこうしているうちに，さっきの 123 兆…… の素因数分解がやっと終わったようですね」

B100 fx =B99+0.1

	A	B
59	5.9	5.900000000000000
60	6.0	5.999999999999990
61	6.1	6.099999999999990
98	9.8	9.799999999999980
99	9.9	9.899999999999980
100	10.0	9.999999999999980

図 12　**A** 列は小数点以下 1 桁で，**B** 列は小数点以下 15 桁で表示（最後の方）

やっと素因数分解できた――【実験 2】　123456707654321 の素因数分解の結果

「果たして，結果は……，

$$123456707654321=29^1\times 41^1\times 103832386589^1$$

でした．1038 億…… の素数を見つけるのに時間がかかったようですね．たった

15桁なのに数十分かかりました．——一方で，

29×41×103832386589

の計算は一瞬です．ほら！」

岳は，パソコンに入力して，一瞬にして掛け算を計算してみせた．

「ぼくの作った素朴なアルゴリズムですから，時間がかかりましたが，たとえもっと効率の良いアルゴリズムを作ったとしても，——実質上無理と言えるくらいに——巨大な数の素因数分解には時間がかかります．この時間がかかることを逆手にとって，暗号化に利用されているのです」

時間がかかることが良いことであるとは，なんだか逆説的で面白い．素因数分解が難しいことを安全性の担保とした暗号方式はRSA暗号と呼ばれ，現代の暗号秘密保全の基礎的な考え方となっている．歴史的経緯については，例えば『暗号解読』などを読むとよい(図13)．

図13　サイモン・シン(著)，青木薫(訳)，『暗号解読』上・下，新潮文庫，2007．書影はamazonから引用

【実験5】　畳を敷き詰められるか？
—コンピュータがかなわない「数学」のチカラ

「素因数分解の実験で，コンピュータにも，意外な弱点があることがわかりました．——弱点というより，無限を扱えないという本質的な限界ですね．でも，スマホをいじったり，メールを書いたり，インターネットで検索したり，といった日常生活に支障はありません．だから便利だし，コンピュータへの依存度が日に日に高まっていくわけです．そうして段々と，コンピュータに聞けばよい，コンピュータは答えをくれる，といった幻想に陥って，コンピュータに聞いている間，自分は思考停止していることを忘れてしまいます．次の実験は，コンピュータに丸投げする前に，一呼吸置いて考えようか，といったものです」

岳はそう言って，あらかじめ配布していた，図14のような，正方形のマスが印刷されたプリントを見るように聴衆に促した．

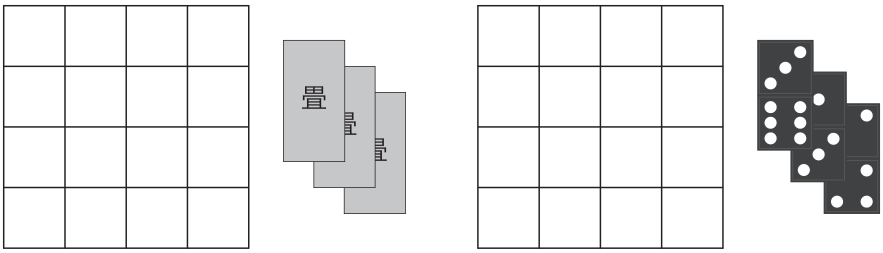


図14　4×4マス

「正方形のマス4×4の16枚分の床に畳を敷きます．マス2つ分の大きさの畳を数枚使って，床全体を敷き詰められるでしょうか．床と畳だと実演が大変なので，マス目とドミノを使って考えましょう．畳やドミノは沢山あります．——大智くん，机の上にあるマス目のプリントとドミノを使ってください．書画カメラでスクリーンに映ります」

「わっ，プレッシャー」と大智は言いつつ，楽しそうだ．

当然この問題は簡単で，図15のような感じに敷き詰められる．敷き詰め方はいろいろ考えられる．岳は続けた．

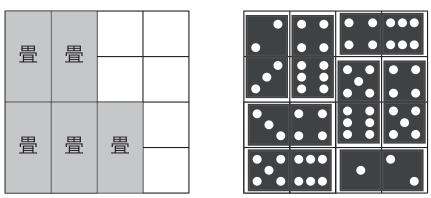


図15　敷き詰められる！

「これは簡単でしたね．では，図 16 のような正方形 3×3 の 9 枚分のマスの場合はどうでしょうか？」

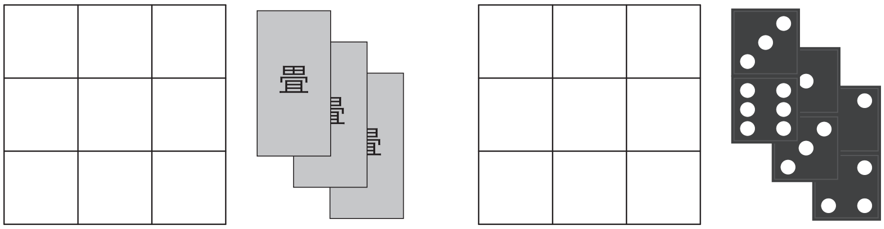


図 16　3×3 マス

「これは……，できません」

大智はあれこれ試してみたが，そう結論付けた．聴衆の間にもそんな雰囲気が漂っている．

「はい．9 は奇数で，畳やドミノの大きさ 2 マスで割り切れないから，敷き詰められませんね．では，図 14 の 16 マスから，左上と右下の 1 マスずつを取り除いた 14 マスの場合はどうでしょうか(図 17)．14 は偶数で，畳の大きさ 2 マスで割り切れるから，敷き詰められるかな？」

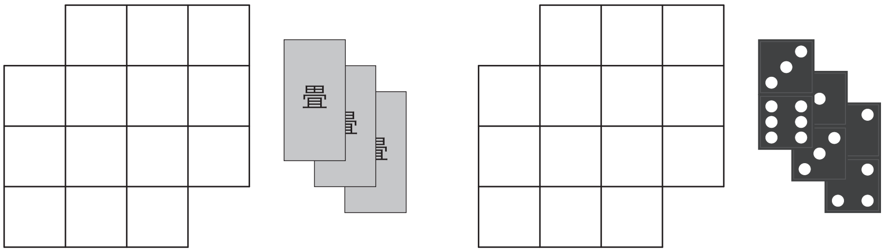


図 17　4×4 マスから隅の 2 マスを除いた 14 マス

大智も聴衆も段々とギブアップムードになってきた．その頃合いで，岳は次の図 18 を見せた．

「こういう機械的で面倒なことは，コンピュータにしらみつぶしに調べてもらいましょう……．と，思いますよね．――ではマス目の数を 1022 に増やしましょう．図 18 の場合は？　ドミノは山ほどあります．本当にコンピュータならすべての場合を数え切れるのできるのでしょうか？　マス目の数はいくらでも増やせますから，一生かかっても終わらないくらいのマスを用意することもできます」

図 18 を見ると，みな口々に無理無理などと感想を言い合っている．岳は次の作業をみなに伝えた．

「数学のチカラを借りて『できないこと』を証明しましょう．大智くん，みなさん，図

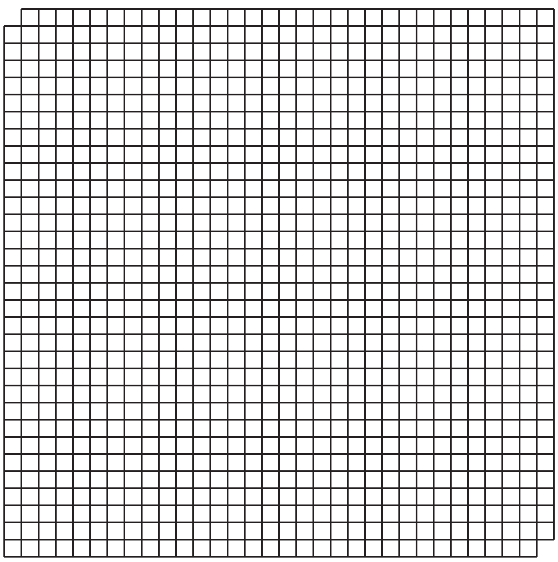
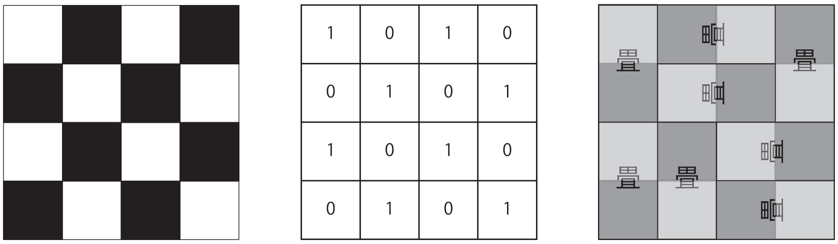


図 18　32×32 マスから隅の 2 マスを除いた 1022 マス

14を図19(a)のような白黒の市松模様に色づけしてください．あるいは，図19(b)のように0，1を交互に書き入れてください」

畳もドミノも，1枚敷くごとに，縦横どちらかの白と黒のマスを1つずつセットで隠す(図19(b))．0と1にしても同じことだ．——マス全体に敷きつめられる，ということは，白と黒のマスを同じ数だけ隠すことになる(図19(c))．



(a)　(b)　(c)

図19　マス目を市松模様に色づけ，あるいは0，1を交互に記入してから，畳を敷き詰める

図20の場合も同じように色づけすると……．自ずと答えが見えてくる．果たして，コンピュータは「敷きつめられない」という答えを出せるだろうか．

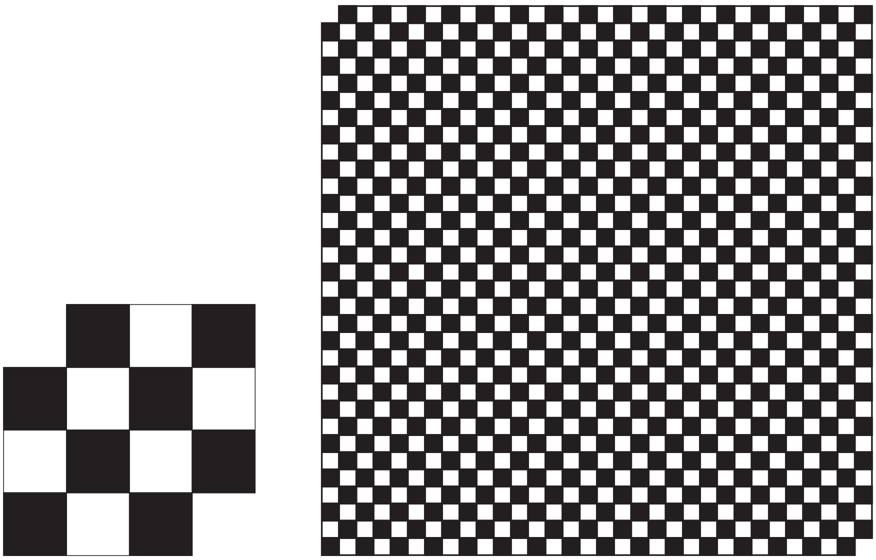


図20　図17と図18を市松模様に色づけ

最後はみんな薬指……のカラクリ

同じような考え方をして，【ウォーミングアップ実験1】「最後はみんな……」のカラクリを説明しよう．

図21のように，親指，人差し指，中指，薬指，小指へ，順に白黒と色を対応させる，あるいは0,1,0,1,0と番号をふる．黒(番号1)の人差し指から，どんな文字数でも2回分移動するから，必ず，偶数回移動することになる．そのときの行き先の番号は1(あるいは黒，つまり人差し指か薬指)である．最後に，「好き」(2文字)だけ小指方向に移動すると，

人差し指　→　中指　→　薬指

薬指　→　小指　→　薬指

のどちらかのパターンになる．結局，薬指に落ち着く．

こうして岳はカラクリを説明した．

「最後に「好き」で薬指．この遊びはよくできていますよね．果たして，コンピュータは，すべての場合をしらみ潰しに調べることはできるのでしょうか？——できませんね．考えられる言葉は無限にあるのですから．ここで，言いたかったことは，次の２点です」

- 極端な短絡的判断

  コンピュータを過剰に信頼し，どんな問題も解くことができると思うこと．

  コンピュータの結果は絶対的であると思うこと．

- 潔癖な排他的判断

  コンピュータには解けない問題があるからといって信じないこと．

  数の近似誤差がつきまとうからといって，すべてを否定する完全拒否反応を示すこと．

そして，次のように締めくくった．

「コンピュータやその結果に必要以上に振り回されてはなりません．コンピュータはあくまでも人間の思考の支援であるべき．——だから，『心得２．コンピュータは人が使うもの』なのです」

（やざき・しげとし／明治大学理工学部）

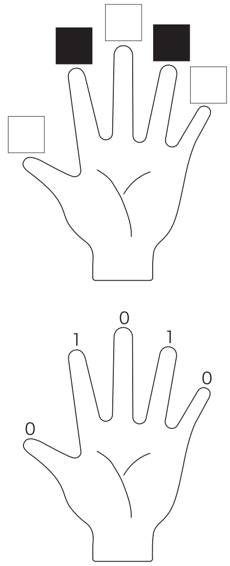


図 21　最後はみんな薬指……なぜ？