

18 大きなのっぽの古時計の高さは？ (本章第 10 節)



問 0.6 古時計の高さはどのくらいなのだろうか。

素朴な振り子の実験 振り子の運動に必要なデータは、「周期 T (s), 振り子の長さ l (m), 錘の重さ M (kg), 重力加速度 g (m/s²)」の四つである。これらがべき乗の積の形 $T^a l^b M^c g^d = C$ (無次元量) で組み合わせられている。これより, $[s]^a [m]^b [kg]^c [m/s^2]^d = [1]$ を解いて, $a - 2d = b + d = c = 0$ から $a = 1, d = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}, c = 0$ を得る。よって, $T \sqrt{\frac{g}{l}} = C$ となる。すなわち, 周期と振り子の長さの関係を得る。

$$T^2 = kl \quad \left(k = \frac{C^2}{g} \right) \quad (0.1)$$

このように次元 (単位) の相互関係だけで値を見積もる解析を次元解析と呼ぶ。次元解析については本章第 10 節や, 拙著『実験数学読本 [65]』の第 0.7 節や第 8 章などを参照。

準備 0.10 (たこ糸や焼き豚用のような) ひも, 錘 (例えば, 大きめのナット)。ひもに, 錘から長さ 25cm と 1m の位置に印をつける (写真 0.39)。

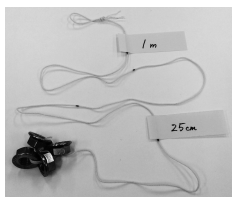


写真 0.39 カラー版は口絵 xvi ページ。

実験 0.10 (1) ひもの 25cm の位置をつまんで, 錘を振って, 振り子の 1 周期 (往復) の時間を測る。例えば 10 周期を測定し, 結果を 10 で割って 1

周期を算出するとよい。

(2) ひもの 1m の位置をつまんで、(1) と同じことをする。

(3) (1)(2) の結果から、(0.1) の k の値を推定する。

答 0.6 $l = 0.25$ (m) から $T \approx 1$ (秒) を、 $l = 1$ (m) から $T \approx 2$ (秒) を得るだろう。これより、 $k = 4$ を得る。よって、古時計の振り子の 1 周期をわかりやすく 2 秒とすると、 $l = 1$ だから高さは 1m となる。時計、台座、飾りの部分を合わせると、古時計全体としては 2m 弱だろう。「大きなのっぽの古時計」の高さの見積もりとしては妥当なところではないだろうか。

注意 0.3 振り子の (鉛直下向きからの) 振れの角度 $\theta(t)$ が小さいとき、運動方程式は $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\theta$ となることが知られている。これを解くと 1 周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ を得る。したがって $C = 2\pi$ となるので、 $g = 9.8$ から $k = \frac{C^2}{g} = 4.0284 \dots$ を得る。上の実験から推定された $k = 4$ は悪くない精度！

「微分」の考えを使うと、ひもの長さの相対誤差から周期の相対誤差がわかる。 $T(l) = C\sqrt{\frac{l}{g}}$ のように T を l の関数とみると、

$$\frac{dT}{T} = \frac{C}{2T} \frac{1}{\sqrt{gl}} dl = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{1}{\sqrt{gl}} dl = \frac{1}{2} \frac{dl}{l}$$

となる。よって、 $\left| \frac{dT}{T} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{dl}{l} \right|$ を得る。例えば、(重心からの距離が) 25cm

のひもの位置が 1cm ずれていたとすると相対誤差は $\left| \frac{dl}{l} \right| = \frac{1}{25} = 4\%$ なの

で、周期にはその半分の $\left| \frac{dT}{T} \right| = 2\%$ 程度の相対誤差が見込まれることにな

る。0.02 秒 (1 秒の 2%) の誤差は測れないから、多少位置がずれてもまったく問題ないことがわかる。(むしろ手で振り子を持って 10 周期を測る誤差の方が大きいだろう。) だからこの実験は結構うまくいくのである。