第 1 章　常微分方程式の数値解法

常微分方程式の数値解法については古くから多くの方法が研究されており，関連書物は洋の東西を問わず数多く出版されている．本来，数値解法に「明るくなる」ためにはそれらの書物を読むことが肝要であるが，数値解法の大海は広く，そして深い．初学者が大海原で路頭に迷わないように，本章では，基本的，初歩的，常識的な考え方を紹介する．本章の例題や問題を「手を動かして」回答し，納得していくことによって，明るくなるための第一歩を踏み出すことができるであろう．

1.1　離散変数法

微分可能な関数 $x = x(t)$ に対して，変数 t が t から微小量 h だけ増えたときの $x(t)$ の**増分**

$$\Delta x = x(t+h) - x(t) = \underline{\dot{x}(t)h} + o(h)$$

の主要部（下線部）を x の**微分**といい，dx と表す．$x = t$ の場合を考えると $h = dt$ であるので，

$$dx = \dot{x}(t)\, dt$$

を得る．こうして，導関数 $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt}$ を**微分商**と呼ぶことに意味があることがわかる．（また，$\dot{x}(t)$ は微分 dt の係数だから，$\dot{x}(t)$ を（t における）微分係数と

呼ぶことにも得心がゆく.）

本章では，常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (0 \le t < T), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

において，微分商（導関数）を差分商（平均変化率）で置き換えた差分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{X(t+h) - X(t)}{h} = f(t, X(t)) \quad (t = 0, h, 2h, \ldots, (N-1)h), \\ X(0) = x_0 \end{cases}$$

を主テーマにする．ここで，$T > 0$ と x_0 は与えられた実数とし，区間 $[0, T]$ を N 等分して $h = T/N$ と定める．この式は，初期値 $X(0) = x_0$ から始まって，$X(h), X(2h), \ldots, X(Nh)$ のように飛び飛びに値が定まるので**離散変数法**と呼ばれる．そこで，$x_n = X(t_n)$，$t_n = nh$ とおけば，与えられた初期値 x_0 から，$x_1, x_2, \ldots, x_N$ を順次定める差分方程式

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{h} = f(t_n, x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{1.2}$$

を得る．(1.2) は (1.1) の近似解法とみなすことができ，**オイラー (Euler) 法**と呼ばれる．

1.2　オイラー法の収束

オイラー法による (1.2) の解「近似解 x_n」と (1.1) の解「真の解 $x(t_n)$」との**誤差 (error)** はどのくらいだろうか．それを見積もるために，

$$\epsilon_n = x(t_n) - x_n \quad (n = 0, 1, \ldots, N)$$

とおく．さらに，仮定として，$f(t, x)$ は $[0, T] \times \mathbb{R}$ 上の連続関数でリプシッツ (Lipschitz) 条件

$$|f(t, y) - f(t, z)| \le L|y - z| \quad (0 \le t \le T;\ y, z \in \mathbb{R})$$

を満たしているとし（$L>0$ は変数に無関係な定数），(1.1) の解は $[0,T]$ で 2 階連続微分可能な関数とする．このとき，$|\ddot{x}(t)|\le M$ が任意の t について成り立つような定数 $M>0$ がある．（2 階導関数は $\ddot{x}=d\dot{x}/dt$ と表記する．）よって，テイラーの定理より，$\lambda_n\in(0,1)$ があって，

$$\begin{aligned}
\epsilon_{n+1} &= x(t_{n+1})-x_{n+1}\\
&= x(t_n+h)-(x_n+f(t_n,x_n)h)\\
&= x(t_n)+\dot{x}(t_n)h+\frac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\lambda_n h)h^2-(x_n+f(t_n,x_n)h)\\
&= x(t_n)+f(t_n,x(t_n))h+\frac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\lambda_n h)h^2-(x_n+f(t_n,x_n)h)\\
&= \epsilon_n+(f(t_n,x(t_n))-f(t_n,x_n))h+\frac{1}{2}\ddot{x}(t_n+\lambda_n h)h^2
\end{aligned}$$

が成り立つ．これより，

$$\begin{aligned}
|\epsilon_{n+1}| &\le |\epsilon_n|+|f(t_n,x(t_n))-f(t_n,x_n)|h+\frac{1}{2}|\ddot{x}(t_n+\lambda_n h)|h^2\\
&\le |\epsilon_n|+L|x(t_n)-x_n|h+\frac{1}{2}Mh^2\\
&= (1+Lh)|\epsilon_n|+\frac{1}{2}Mh^2
\end{aligned}$$

がわかる．ゆえに，$\epsilon_0=0$ を使って，

$$\begin{aligned}
|\epsilon_n| &\le (1+Lh)|\epsilon_{n-1}|+\frac{1}{2}Mh^2\\
&\le (1+Lh)^2|\epsilon_{n-2}|+(1+(1+Lh))\frac{1}{2}Mh^2\\
&\le (1+Lh)^3|\epsilon_{n-3}|+(1+(1+Lh)+(1+Lh)^2)\frac{1}{2}Mh^2\\
&\le (1+Lh)^n|\epsilon_0|\\
&\qquad +(1+(1+Lh)+(1+Lh)^2+\cdots+(1+Lh)^{n-1})\frac{1}{2}Mh^2\\
&= (1+Lh)^n|\epsilon_0|+\frac{(1+Lh)^n-1}{2Lh}Mh^2\\
&= \frac{M}{2L}((1+Lh)^n-1)h\\
&\le \frac{M}{2L}(e^{nLh}-1)h \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{M}{2L}(e^{LT}-1)h = Ch \tag{1.4}$$

がすべての $n=0,1,\ldots,N$ について成立する.（上の式変形からわかるように初期値の誤差が $|\epsilon_0| \leq C_0 h$ であっても同様の結果を得る.）ここで，定数 $C>0$ は N に無関係である．よって，$|x(t_n)-x_n| = O(h^1)$ であることがわかった．h の指数 1 を**収束次数 (order of convergence)** と呼び，オイラー法による近似解は **1 次精度**で真の解に収束する，あるいはオイラー法は 1 次精度の近似解法であるという．一般に，$|x(t_n)-x_n| = O(h^r)$ となる近似解法は r **次精度**であるといい，指数 r を収束次数と呼ぶ.

オイラー法は最も素朴な方法であり，扱いは楽である．精度はよいとはいえないが，場合によっては非常に有効な手段である.

［**問 1.1**］ (1.3) に式変形するとき，$x \geq 0$ と自然数 n に対して，

$$(1+x)^n \leq e^{nx}$$

という事実を使った．これを示せ.

1.3　オイラー法の改良

オイラー法と，以下に挙げるその類型やその高精度改良型の 4 種は基本的である．特に，オイラー法とルンゲ－クッタ法は知っておくべき近似解法である.

1. オイラー法

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

2. 後退オイラー法

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

3. **2 次のルンゲ－クッタ (Runge-Kutta) 法** $(\alpha+\beta=1,\ \beta \in (0,1])$