

を得る．これは (0.10) において $C = \frac{1}{2}$ とした式に他ならない．

例 0.4 のように，複数の量の関係式を次元を用いて導くことを**次元解析**という．次元解析では，(0.10) における C の値を決定することはできない．しかし，運動方程式 (0.11) を解かなくても，問題設定に必要な量の次元だけを用いて，定性的に重要な情報を指数の計算をするだけで得ることができる．例 0.4 の問題の場合，(0.10) から落下距離は落下時間の 2 乗に比例することがわかる．よって，落下時間が 2 倍になったら，落下距離は 4 倍になることが，運動方程式をわざわざ解かなくてもわかる！

定量的な情報，すなわち C の値を知りたかったら運動方程式を解かなくてはならないが，実際に物体を落下させておおよその C の値を得ることもできる．実験から得られる次元の無い量 C の値には誤差が含まれるので「おおよそ」と言った．そのような誤差を微分を使って見積もる方法を第 5 章_(p.133)で述べる．

問 0.1 例 0.4_(p.15) において，落下する物体の質量 m の代わりに物体の密度 ρ を採用して，関係式 $h = f(\rho, g, t)$ としたときの関数 f を次元解析から定めよ．なお，密度は単位体積当たりの質量であるから次元は $[\rho] = \text{ML}^{-3}$ である． ■

0.4 ピタゴラスの定理

「直角三角形において，直角に向かい合う辺〔斜辺〕の上の正方形は直角を囲む 2 辺の上の正方形〔の和〕に等しい」という命題は，ピタゴラスの定理として知られている．現代的な表現をすれば，「直角三角形の直角を挟む 2 辺の長さを a , b ，斜辺の長さを c とするとき， $c^2 = a^2 + b^2$ が成り立つ」となるだろう (図 0.6)．

18 第0章 次元と次元解析の考え方

ピタゴラスの定理は、名前が冠してあるように、ピタゴラス³⁾が率いる学派が発見した命題といわれている。ピタゴラスの存命中の発見であれば紀元前500年頃のことであろう。ピタゴラスは書物を

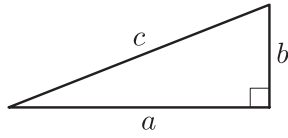


図0.6 直角三角形

残していないので、証明の詳細は不明であるが、いくつかの推測はなされている [34, pp.78–79]. 一方、「論証数学」の発明はピタゴラス後の紀元前444年頃のヒポクラテスによるから [41, 第6章], ピタゴラスによる証明がなされていたかどうか以前に, そもそも命題には証明が必要であるという考えがなかった可能性が高い. 紀元前のはっきりとした証明としてあげられるのは, ユークリッド⁴⁾の『原論』第1巻・命題47における証明である. (『原論』の邦訳書 [42, p.33][41, p.241] を参照. 本節冒頭のピタゴラスの定理の命題は [41] による. [斜辺] と [の和] は訳者による補足.) 遅くとも紀元前300年頃には知られていた証明で, それ以来, 現在にいたるまで, 世界中で数百ともいわれる証明が発見されている. ここで紹介する証明は次元解析を用いたものである. 幼少期のアインシュタイン⁵⁾にご登場願おう. 次の小節は, ストロガッツの記事『アインシュタ

³⁾ Pythagoras, 紀元前570年頃–紀元前490年頃. 現在のトルコ沿岸(エーゲ海)にあるイオニア地方(Ionia)のサモス島(Samos)で生まれ, エジプトに留学し, のちに故郷に帰ったという以外, その生涯は深い神秘におおわれている [34, p.77]. ピタゴラスの定理はしばしば三平方の定理といわれるが, この呼称は第2次世界大戦中の「敵性語排除」の際に考案されたものである [41, p.244].

⁴⁾ Euclid, 紀元前325年頃–紀元前265年頃. エジプトのアレクサンドリア(Alexandria)で生没したといわれる. ラテン語読みだとエウクレイデス(Euclidは英語表記). ユークリッドはその実在すら疑われるほどに, その生涯がほとんど謎に包まれている.

⁵⁾ Albert Einstein, 1879.3.14 [独]–1955.4.18 [米]. 20世紀最高の理論物理学者. 現代の物理的な現実に対する考え方に, もっとも多大な寄与をした.

インの最初の証明』[96]に依拠している.

◎— アインシュタインの「最初の証明」

アインシュタインは4, 5才のころ, 父からコンパス (方位磁石) を見せてもらった. 針がいつも北を向いている! 何かが引っ張っているわけでもないのに.

私はこの体験が私に深い印象を与えたことを, 今でも覚えてますし, 少なくとも覚えていると信じています. ものごとには深い隠された何かが潜んでいるのだと.

アインシュタインはエッセイ『自伝的覚え書き』でこう語っている [40, p.10]. さらに続けて,

12才のとき, 私は全く異なる性質の第二の驚きを経験しました. それは, 学年の初めに手にしたユークリッド平面幾何学を扱った小さな本の中にありました.

その本に書かれていた明瞭さ, すなわち数学的仮定から「疑う余地なく確実に証明される」という考えは, アインシュタイン少年にコンパスの不思議とはまったく異なる性質の不思議さを引き起こした. そして, 次のように続けている.

ピタゴラスの定理は, その聖なる幾何学の小冊子が私の手に渡る前に, 叔父から聞いたことがあります. 私は苦労して, 三角形の相似性に基づいてこの定理を「証明」することに成功しました. そうすると, 直角三角形の辺の関係は, 鋭角の1つによって完全に決定されなければならないことが「明らか」になりました.

残念ながらアインシュタインが語った「証明」の記録はない. し

20 第0章 次元と次元解析の考え方

かし、シュレーダーの本 [90, p.3] には、その「証明」が本当になされたことを擁護する一文が載っている。

ヤコブ・アインシュタインが11歳の甥っ子アルバートに(ユークリッド)幾何学を教えていたとき、幼いアインシュタインは、最大限に単純化することに努めていたが、ユークリッドの証明の中には不必要に複雑なものがあると感じていた。例えば、ピタゴラスの定理 $a^2 + b^2 = c^2$ の典型的な証明では、斜辺が c 、辺が a と b の基本的な直角三角形に加えて、余分な直線、角度、四角形が本当に必要だったのだろうか？鋭い少年は「少し考えて」、たった1本の線を追加するだけで証明できることを思いついた。

シュレーダー氏は、アインシュタインのこの話をテル・アビブのヴァイツマン研究所のリフソン氏から聞き、リフソン氏はアインシュタインの助手だったシュトラウス氏から聞き、シュトラウス氏は直接(大人の)アインシュタインから話を聞いた [90, p.3 の脚注2]。名前を明かしているので、確度の高い伝言ゲームなのだろう。

いよいよアインシュタイン少年の証明を、次元解析風に紹介しよう。

図 0.7 のように、直角三角形 ABC の斜辺の長さを x とすると、 $[x] = L$ で、面積の次元は L^2 である。よって、面積をドイツ語の Ebene の頭文字を使って E_x とおくと、

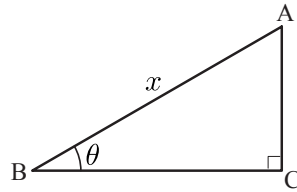


図 0.7 最小角 θ

$$\left[\frac{E_x}{x^2} \right] = \frac{[E_x]}{[x]^2} = \frac{L^2}{L^2} = 1 \quad (0.12)$$

より、次元の無い比例定数を m として $E_x = mx^2$ と書ける。 θ を

0.4 ピタゴラスの定理 21

三角形の最小角とすると、面積は θ に依存するから、 m は θ の関数 $m(\theta)$ となる (図 0.7). 角度の単位ラジアンは、円の弧の長さと同半径の比であるから、 $[\theta] = \text{L L}^{-1} = 1$ となって次元はない. 表 1.3_(p.38) を見よ. (弧度法と度数法については、注意 1.2_(p.38) を参照.)

次に、図 0.8 のように、直角三角形 ABC の頂点 C から斜辺に垂線を下ろす. この補助点線がアインシュタイン少年が見つけた 1 本の線である (はず).

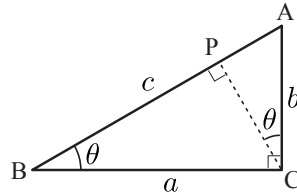


図 0.8 1本の補助点線

図 0.8 からわかるように、こうして、直角三角形 ABC は、二つの相似縮小された直角三角形 CBP と ACP に分割される.

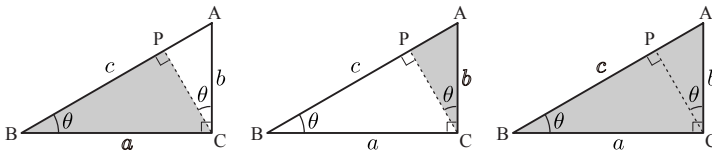


図 0.9 カラー版は口絵 ii ページ

あとは、 $E_x = mx^2$ の x が a, b, c の場合を考えれば、図 0.9 のように、 $E_a + E_b = E_c$ が成り立つ. よって、 $ma^2 + mb^2 = mc^2$, すなわち、 $a^2 + b^2 = c^2$ を得る.

この証明で用いた文字の選び方はシュレーダー [90, pp.3–4] による. ドイツ語の面積をもちだし—シュレーダーはドイツの物理学者だからこれは思いつくとしても—、 $E = ma^2$, $E = mb^2$ を使って最終的にアインシュタインの有名な公式 $E = mc^2$ に引っ付けたところは、同書で転載している漫画 [56] からヒントを得たのだろうか. もちろん、エネルギーと質量の等価公式 $E = mc^2$ において、後述するように、 E はエネルギー (表 1.3_(p.38)), m は質量 (表 1.1_(p.34)),

22 第0章 次元と次元解析の考え方

c は光速 (表 1.5_(p.41)) である.

0.5 素朴な疑問

以上, 次元や次元解析を簡単に導入した. 読者のみなさんは大まかな流れを把握することができたと期待する. 文中, 詳細は第〇〇章で後述するといった記述があったが, そういった記述の他にも, 以下のような素朴な疑問がいくつか湧いてきたことと思われる.

- 比較できる「量」とは何か. そもそも「単位」とは何か.
- なぜ $[\text{面積}] = [\text{長さ}]^2$ としてよいのか. 例えば, 坪やヘクタールはそれ自身で面積の単位である.
- $(0.9)_{p.15}$ において, $[h] = [m]^\alpha [g]^\beta [t]^\gamma$ とおいたが, なぜこのようなべき乗の関係だけを考えればよいのか.
- $(0.12)_{p.20}$ において, $\left[\frac{E_x}{x^2} \right] = \frac{[E_x]}{[x]^2}$ としたが, このような次元の計算は自然なのか.

本章に続く, 第1章_(p.25)と第2章_(p.47)で, これらの疑問に答えていく. それ以降の章では, さまざまな実用的な例を中心に, 次元解析の具体的手法を学んでいく.