

感染症流行の SIR 数列モデル (IV)

矢崎成俊

登場人物：

須宇賀 空 (すうが・そら), フリーの実験数楽者
堂仁加 菜伶 (どうにか・なれ), 高校2年生
堂仁加 素琉 (どうにか・する), 高校1年生

ここは日本のどこか。数楽で遊ぶ家。

どうにかする 素琉と姉のなれが、こんにちは！と元
気に入ってきた。家主のすうがが空は、今日の話
を次のように導入した。

「こんにちは。今回は基本再生産数を使って感
染症の流行の有無を考えました。今回は最終的
な感染状態、つまり流行の結末について考えま
しょう」

SIR 数列モデル (おさらい)

次の SIR 数列モデルと条件を考えていた。

$$S_{n+1} = S_n - \sigma S_n I_n \tau \quad (1)$$

$$I_{n+1} = I_n + \sigma S_n I_n \tau - \rho I_n \tau \quad (2)$$

$$S_n + I_n + R_n = N \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$S_0 \gg I_0 > 0, R_0 = 0 \quad (\text{初期条件}) \quad (4)$$

$$0 < \rho \tau < 1 \quad (\text{パラメータの条件 1}) \quad (5)$$

$$0 < \sigma N \tau < 1 \quad (\text{パラメータの条件 2}) \quad (6)$$

ここで、 N は封鎖人口で、感受性者と感染者の
それぞれのサイズ S_n と I_n がわかれば、回復者
のサイズ R_n が (3) より算出できる。

「前回、基本再生産数 $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$ を導入しま
した。特に $\mathcal{R}_0 < 1$ ならば感染症の自然消滅が期
待されることがわかりました。感染症流行の結

末として嬉しい『終息』を目指して、 $\mathcal{R}_0 < 1$ に
なるように人為的に何かできることはあるのだ
しょうか」と空が2人に問いかけた。

人との接触 8 割減

基本再生産数 $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$ は3つのパラメー
タからなっている。そのうち σ と ρ は感染症
によっておおよそその値が決まる。例えば、イン
フルエンザの場合、 $\sigma = 0.48$, $\rho^{-1} = 3.5$ days,
 $\mathcal{R}_0 = 1.7$ と推定されている ([1] を参照)。一般
に、パラメータの値は、実測場所とウイルスの
種類に強く依存するので、絶対的な数値ではな
く目安とすべき数値である。

どうしたら $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho}$ を1より小さくして流
行を防ぐことができるのか。 σ や ρ^{-1} はウイルス
に大きく依存するパラメータであるから、人為
的に小さくなるように動かすことは難しいだろ
う。となると人為的に制御できそうな感受性者
のサイズ S_0 を小さくするしかない。サイズ (人
数) を制御することなんてできるのだろうか。

例えば、COVID-19 の場合、 $\mathcal{R}_0 = 1.5 \sim 3.5$
と推定されている ([2] を参照)。大雑把に間を
とって、 $\mathcal{R}_0 = 2.5$ としたとき、これを $\mathcal{R}_0 = 0.5$
にするには、 S_0 を $\frac{1}{5}$ 倍にしなければならない。
サイズ自体を減らすことはできないが、感染者
と出会う人数を意識的に減らすことはできる。
どうするのか。

「不要不急の外出はするな、ですね」と素琉が
すかさずいった。

「そう。このフレーズは何回も聞きましたね。

つまり、対象としている封鎖された地域において、簡単にいえば、本当はサイズ S_0 だけの感受性者がいるのだけれども、8割の人が外出しなければ実質のサイズ S_0 は $\frac{1}{5}$ 倍になるから、 \mathcal{R}_0 を 2.5 から 0.5 に減らすことができるのです。ただ実際は、8割の人が家から一歩もでないことは考えられないので、せめて普段 10 人と接触しているところを 2 人に抑えれば概ね達成できます。これが現在も蔓延中のコロナ禍の初期段階において蔓延を防止するためにしばしば警鐘された『人との接触 8割減』の簡単な説明です」と空が締めくくった。

「今までなぜ 8割減なのかピンときませんでした。数学のモデルを使ってゆっくり考えていくととてもしっくりきました」と菜怜がしみじみいった。

「ぼくも SIR 数列モデルが好きになってきました」と素琉もいった。

「数学のモデルを使って現実を考えるのは、わかると面白いですよね。ここまでの、前回から続いた基本再生産数を使った感染症の流行の有無についての一区切りがつかしました。以降は、今回の主題、最終的な感染状態、つまり流行の結末について考えましょう。そのために、極限計算について少し追加の事項があります」と空はいつて、極限について話し始めた。

● 極限計算 (おさらいと追加)

極限について次の 2 つの計算を容認してきた。

$$0 < r < 1 \text{ のとき } r^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (7)$$

$$r > 1 \text{ のとき } r^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8)$$

「今回は、感染症流行が進行して十分に時間が経ったときの感染者の割合 (最終規模) などの最終的な感染状態、すなわち流行の結末を論じます。具体的には、最終規模として、感受性者の初期サイズ S_0 と $n \rightarrow \infty$ のときの S_n の極限値

S_∞ との差の相対的な比の値 $\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$ を求めることを目標にします。このとき、上の極限計算に加えて、さらに次の 2 つの極限計算も認めたのですが、直観的に容認できるかゆっくり考えましょう」と空が 2 人に聞いた。

● 追加の極限計算 (命題 1)

「以下の極限計算を命題 1 と名付けましょう」と空はいつた。

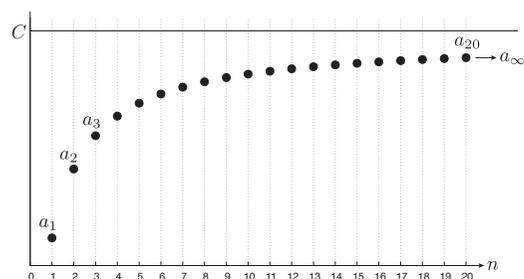
命題 1 単調増加な数列 $\{a_n\}$ のすべての項がある定数 C 以下であるとする。すなわち、

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$$

$$a_n \leq C \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるとする。このとき、 $\{a_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ のときの極限が存在する。また、その極限値を a_∞ と書くと、 $a_\infty \leq C$ である。

「以下は、この命題 1 のイメージ図です」と空は 2 人に図をみせた。



「 C が極限値になるわけではないのですね」と菜怜がいつた。

「 C という定数自体が重要なわけではありません。数列のすべての項よりも大きい定数があることが重要です。だから、例えばすべての項が 10 以下といっても、100 以下といっても、極限値 a_∞ が存在することには変わりありません」と空が答えた。

「そうか。例えば、一般項が $a_n = n$ みたいに、単調増加でいくらでも大きくなるような数列は

収束しないのか」と素琉がいったら、
 「すべての項がある定数以下でも、単調増加でないと収束しない数列もあるしね。例えば、 $a_n = (-1)^n$ みたいに」と菜怜もコメントした。
 「2人ともよい具体例をだしてくれました。

『単調増加』かつ『ある定数以下』⇒『収束』
 だから、収束しない数列は、単調増加でないか、あるいはすべての項がある定数以下でない数列として特徴付けられます。もちろん、この逆は成り立ちません。例えば、 $a_n = \frac{1}{n}$ ならば、数列 $\{a_n\}$ は単調増加ではありませんが、0 に収束します」と空がいった。

「空さんの例で思いついたのですが、単調減少かつある定数以上の数列も収束するといえるのですか」と菜怜が問題提起した。

「いいですね。次の問題を考えてみましょう」と空が論点を問題の形で整理した。

問題 単調減少な数列 $\{b_n\}$ のすべての項がある定数 D 以上であるとする。すなわち、

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$$

$$b_n \geq D \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるとする。このとき、 $\{b_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ のときの極限が存在するか？ 存在するとして、その極限値を b_∞ と書くと、 $b_\infty \geq D$ が言えるか？

「なんか、命題1をひっくり返しただけみたい」と素琉がつぶやいた。

「確かに、素琉！」とって菜怜が答えを完結した。「 $a_n = -b_n$, $C = -D$ とおくと、数列 $\{a_n\}$ は単調増加で $a_n \leq C$ を満たします。だから、命題1より数列 $\{a_n\}$ の極限値 a_∞ が存在して、 $a_\infty \leq C$ を満たします。だから、数列 $\{b_n\}$ の極限も存在して、極限値は $-a_\infty$ となって、こ

れを $b_\infty = -a_\infty$ と書くと、 $b_\infty \geq -C = D$ が言えます」

「お見事です。つまり、この問題は本質的には命題1と変わらないことがわかりました。命題1の証明は実数とは何か、といった微分積分学の根源にかかわる話しになるのでここでは証明しません。でも、命題1の言っていることは納得してもらえたのではないのでしょうか」と空は2人に聞いた。2人とも頷いたので、

「もう1つ証明なしで認めてほしい極限計算があります。これを命題2としましょう」といつて、はなしを続けた。

●追加の極限計算 (命題2)

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 (sum) を s_n とする。すなわち、

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

とする。 s_n を数列 $\{a_n\}$ の第 n 部分和といい、

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

と表す。数列 $\{a_n\}$ の初項が a_0 の場合でも、

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

と書いて s_n を第 n 部分和という。

「第 n 部分和を s_n と書いたのは、sum の頭文字 s を使ったのですか」と菜怜が聞いた。

「はい。 s_n と書かなくてもよいですが、例えば b_n と書くと a_n と同列な扱いに見えるので、なんとなく避けました。 $\{a_n\}$ の第 n 部分和だから A_n と書いてもよいですね。記号は、混乱しない限り頭文字か雰囲気で決めることが多いです。でも、 Σ は和 (sum) の頭文字の大文字 S に相当するギリシャ文字 Σ (シグマ) を記号化したもので、雰囲気ではありません」と空が補足した。

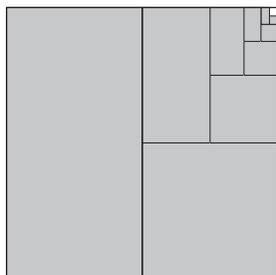
ちなみに、 σ は Σ の小文字だが、これは必ずしも和 (sum) とは関係のないいろいろなパラメータに使うことが多い。SIR 数列モデルでは感染伝達係数として σ を使った。何となく

susceptible (感受性のある)の頭文字に絡めた感じだが、あまり深い意味はなく、他の文字を使うことも多い。

さて次の命題は、無限に項を足して収束したならば、各項は0に限り無く近づいていくというものである。

命題2 数列 $\{a_n\}$ の第 n 部分和 s_n がつくる数列 $\{s_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ のときの極限が存在したならば、数列 $\{a_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき0に収束する。

「命題2は、以前に対話した半分半分の図をイメージするとよいです」と空は図をみせた。



菜怜はこの図を用いて極限イメージを丁寧に解説した。

「 $a_n = \frac{1}{2^n}$ とすると数列 $\{a_n\}$ は単位正方形の面積の半分、残りの半分、残りの半分と続いています。それらを足していったものを $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とすると、それは図の灰色の面積のようなもので、最終的に極限は単位正方形の面積に収束します。だから $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$ です。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ です」

「その通りです。単位正方形が灰色で埋め尽くされたら、当然、白色はなくなりますものね。直観的に命題2を証明してみましょう」と空がいった。

数列 $\{s_n\}$ の $n \rightarrow \infty$ のときの極限値を s_∞ とする。すなわち、

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \rightarrow s_\infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。もちろん、 $s_{n-1} \rightarrow s_\infty$ でもある。

$$a_n = s_n - s_{n-1} = s_n - s_\infty + s_{n-1} - s_\infty$$

なので、三角不等式から

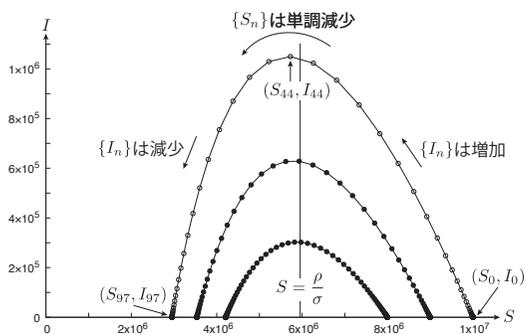
$$|a_n| \leq |s_n - s_\infty| + |s_{n-1} - s_\infty|$$

となる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすると右辺は0に収束するので、左辺も0に収束する。 $|a_n| \rightarrow 0$ なら $a_n \rightarrow 0$ である。

「極限計算の準備が長くなってしまいました。いよいよ本題に入りましょう」と空がいった。

● 点列 $\{(S_n, I_n)\}$ の動き

「これから、感染者のサイズ I_n の行方、感受性者のサイズ S_n の行方、そして最終規模 $\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$ を求めていきます。それらのイメージをつかむために、(1)(2)の解の組 (S_n, I_n) を、SI座標平面上の点の座標として、点列 $\{(S_n, I_n)\}$ の動きをみてみましょう」といって、空は次の図を見せた。



図には、見やすいように○の点列 $\{(S_n, I_n)\}$ を線分でつなげた軌道1本と、独立した●の軌道2本が描いてある。いずれも(1)(2)を $n=0$ から順次、 $I_n < 1$ となる n まで解いた点列で、3つの軌道の違いは S_0 の値だけである。

○軌道のパラメータは以下で与えた。2つの●軌道の S_0 は、それぞれ以下の S_0 の0.9倍と0.8倍の値とした。また、 $S_0 = N - I_0$ は $R_0 = 0$ を含むが、初期条件(4)に対応して明示した。

$$N = 1000 \text{ 万}, S_0 = N - I_0, I_0 = 10, R_0 = 0$$

$$\rho = 0.5, \tau = 1, \sigma = \frac{70}{N} \times 1.2\% \quad (10)$$

これらは仮想パラメータである。平均感染期間を2週間(ρ^{-1})とした。また、 σ を、

感染者1人あたりの1週間(τ)に接触する仮想サイズ(人数)の平均70とし、それを N で割った接触確率に、

1回の接触で感染させる確率1.2%を掛けた値とした。

$\sigma I_n \tau$ は第 n 週に感受性者が感染者となる感染率であったから、これに S_n を掛けた $\sigma S_n I_n \tau$ が第 n 週に増加する感染者のサイズとなる。

各軌道で共通する特徴は、数列 $\{S_n\}$ は単調減少で、 $S = \frac{\rho}{\sigma}$ の線を境に数列 $\{I_n\}$ は増加から減少に転じることである。

「この図を参考に解析を進めましょう」と空がいった。

● 感染者のサイズ I_n の行方

(2)(5)と $I_0 > 0$ から、

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\geq (1-\rho\tau)I_n \tau \geq (1-\rho\tau)^2 I_{n-1} \tau \\ &\geq \dots \geq (1-\rho\tau)^{n+1} I_0 \tau > 0 \end{aligned}$$

となつて、有限時間の n に対して、 $I_n > 0$ であることがわかる。 $n \rightarrow \infty$ としたとき I_n の行方について考えよう。

「上の3つの軌道図からきつと $I_\infty = 0$ です」と素疏が予想した。

「そうなるか示してみましよう」と空がいった。

(1)(2)を辺々足して、 S_n, I_n を左辺に移項すると、

$$S_{n+1} - S_n + I_{n+1} - I_n = -\rho I_n \tau$$

を得る。以下、番号 n を1つずつ0になるまで下げていく。

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} + I_n - I_{n-1} &= -\rho I_{n-1} \tau \\ S_{n-1} - S_{n-2} + I_{n-1} - I_{n-2} &= -\rho I_{n-2} \tau \\ \dots &= \dots \\ S_1 - S_0 + I_1 - I_0 &= -\rho I_0 \tau \end{aligned}$$

これらをすべて辺々足し合わせると、

$$S_{n+1} - S_0 + I_{n+1} - I_0 = -\rho \sum_{j=0}^n I_j \tau$$

となる。封鎖人口の仮定(3)と $R_0 = 0$ から、

$$\rho \sum_{j=0}^n I_j \tau = N - (S_{n+1} + I_{n+1}) < N$$

を得る。最後の不等式は、上で示した $I_n > 0$ と、前々回(9月号(12)式)に示した $S_n > 0$ を使った。これより、 $J_n = \sum_{j=0}^n I_j$ とおくと、 J_n は数列 $\{I_n\}$ の第 n 部分和で、

$$J_n < \frac{N}{\rho\tau} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

がわかる。数列 $\{I_n\}$ の各項は $I_n > 0$ を満たすから、数列 $\{J_n\}$ は単調増加な数列である。よつて、命題1より数列 $\{J_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束する。これより、命題2から数列 $\{I_n\}$ は極限值 $I_\infty = 0$ に収束することがわかる。

「最終的には、感染者がいなくなるということですね」と菜恰が確認した。

「はい。 $I_\infty = 0$ から現時点でわかることは、封鎖人口の仮定(3)から、感受性者と回復者のサイズを合わせた数列 $\{S_n + R_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき N に収束することだけです。でも、上の3つの軌道図から、数列 $\{S_n\}$ はある正の値 S_∞ に収束することが予想されます」と空がいった。

● 感受性者のサイズ S_n の行方

上述したように数列 $\{S_n\}$ の各項は $S_n > 0$ を満たし、(1)と $S_n > 0, I_n > 0$ から

$$S_0 > S_1 > \dots > S_n > S_{n+1} > \dots \quad (11)$$

である。すなわち、 $\{S_n\}$ は単調減少な数列である。よつて、命題1(の後の問題と菜恰の回答)から、 $\{S_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき収束する。その極限値を S_∞ とすると、 $S_\infty \geq 0$ である。

次に、(2)を次のようにまとめる。

$$I_{n+1} = I_n + \sigma \left(S_n - \frac{\rho}{\sigma} \right) I_n \tau \quad (12)$$

これより、 $S_\infty < \frac{\rho}{\sigma}$ が成り立つことを S_0 の大きさを場合分けして示そう。

① $S_0 \leq \frac{\rho}{\sigma}$ の場合 (11) から、 $n = 1, 2, \dots$ について $S_n < \frac{\rho}{\sigma}$ がわかる。

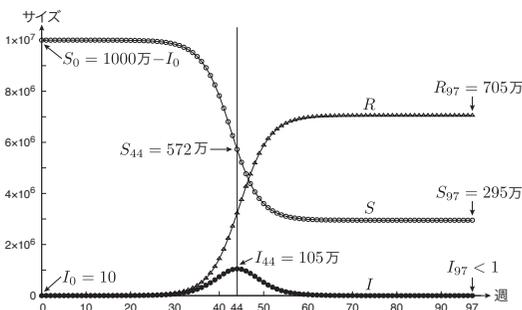
② $S_0 > \frac{\rho}{\sigma}$ の場合 $S_\infty \geq \frac{\rho}{\sigma}$ と仮定する。(11) から、 $S_\infty \geq \frac{\rho}{\sigma}$ ならば、すべての n について、 $S_n \geq \frac{\rho}{\sigma}$ である。このとき、(12) から数列 $\{I_n\}$ は単調増加ですべての n について $I_n \geq I_0 > 0$ となるが、これは $I_\infty = 0$ に矛盾する。

以上より、 S_0 の大きさにかかわらず、最終的に $S_\infty < \frac{\rho}{\sigma}$ が成り立つことがわかった。

「 $S_\infty > 0$ を示すことを最終目標にします。それには少々準備が必要なので次回にまわします。最後に $S_\infty > 0$ となることを予見させる、SIR 数列モデルの数値シミュレーションを紹介しましょう」と空がいった。

● 解数列 $\{S_n\}$, $\{I_n\}$, $\{R_n\}$ の挙動

下図は上の○軌道に対応した、(10) をパラメータとした SIR 数列モデル (1) (2) (3) の数値シミュレーション図である。 $I_n < 1$ となった $n = 97$ までの解点列 $\{S_n\}$, $\{I_n\}$, $\{R_n\}$ を線分で繋いでプロットした。



たった $I_0 = 10$ から始まったにもかかわらず、基本再生産数が $\mathcal{R}_0 = \frac{\sigma S_0}{\rho} = 1.68 > 1$ なので、感染者は増殖し、ピークは第 44 週で $I_{44} = 105$ 万となった。 $\mathcal{R}_n = \frac{\sigma S_n}{\rho}$ を第 n 週の実効再生産数と呼ぶことにすると、 \mathcal{R}_n が初めて 1 を下回ったのは、同じく第 44 週の $\mathcal{R}_{44} = 0.96 < 1$ だった ($S_{44} = 571$ 万)。 S_n に対する I_n の比率は、

$$\frac{I_0}{S_0} = 0.0001\%, \quad \frac{I_{44}}{S_{44}} = 18\%$$

である。第 0 週は圧倒的に S_0 が大きく、第 44 週は相対的に I_{44} が大きいのが、感染者のサイズの大小よりも \mathcal{R}_0 や \mathcal{R}_n が重要なことがわかる。つまり、 S_0 のわずか 1 万分の 1% しか I_0 がいないのに、 $\mathcal{R}_0 > 1$ だったので I_n は増加し、一方、第 44 週では S_{44} の 18% も I_{44} がいるのに、 $\mathcal{R}_{44} < 1$ であったために、その後は単調に減少する。図の第 44 週の縦線はその境目を表した直線である。

「基本再生産数とか実効再生産数は、めちゃ重要なんですね」と菜恰が感慨深げにいった。

「はい。今回はさらに重要な予測を考えましょう。このシミュレーションでは、 $S_0 \approx 1000$ 万から $S_{97} = 295$ 万に減りました。おおよその最終規模は $\frac{S_0 - S_{97}}{S_0} = 70.5\%$ です。つまり、およそ 7 割の人が感染して流行が終息したことになります。この最終規模の大きさを、初期値 S_0, I_0 と基本再生産数 \mathcal{R}_0 を用いて見積もろうというのが、次回の最終目標です」と空は締めくくり、今日の対話を終了した。

参考文献

- [1] 西浦博, 稲葉寿, 「感染症流行の予測: 感染症数理モデルにおける定量的課題」, 『統計数理』 **54** (2) (2006) 461-480.
- [2] 鈴木絢子, 西浦博, 「感染症の数理モデルと対策」, 『日本内科学会雑誌』 **109** (11) (2020) 2276-2280.

(やぎき しげとし/明治大学)