対話 7

感染症流行の SIR 数列モデル（III）

矢崎成俊

登場人物：
須宇賀 空（すうが・そら），フリーの実験数楽者
堂仁加 菜怜（どうにか・なれ），高校２年生
堂仁加 素琉（どうにか・する），高校１年生

ここは日本のどこか．数楽で遊ぶ家．

家主の須宇賀空（すうがそら）が，今日の話をまとめ直していたとき，堂仁加素琉（どうにかする）と姉の菜怜（なれ）が，こんにちは！ と颯爽と入ってきた．

「こんにちは．いよいよ今日は，SIR 数列モデルの話の佳境に入ってくるでしょう」

SIR 数列モデルと極限（おさらい）

前回から考えていた感染症流行に関する SIR 数列モデルは次の連立方程式で，

$$S_{n+1}=S_n-\sigma S_n I_n\tau \qquad (1)$$

$$I_{n+1}=I_n+\sigma S_n I_n\tau-\rho I_n\tau \qquad (2)$$

以下が条件であった．

$$S_n+I_n+R_n=N \quad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (3)$$

$$S_n \gg I_0>0,\ R_0=0 \ \text{（初期条件）} \qquad (4)$$

$$0<\rho\tau<1 \ \text{（パラメータの条件 1）} \qquad (5)$$

$$0<\sigma N\tau<1 \ \text{（パラメータの条件 2）} \qquad (6)$$

ここで，N は封鎖人口である．

また，極限について以下の計算を容認した．

$$0<r<1 \text{のとき} \quad r^n\to 0 \ (n\to\infty) \qquad (7)$$

「今回は，次の極限も認めたいのですが，直観的に容認できますか？」と空が２人に聞いた．

$$r>1 \text{のとき} \quad r^n\to\infty \ (n\to\infty) \qquad (8)$$

「これを，数列 $\{r^n\}$ は $n\to\infty$ のとき，（正の）無限大に発散する，と読みます」

「例えば，$r=2$ のとき，2^n は倍々計算で無限大に発散しそうです」と菜怜．

「例えば，$r=10$ のとき，10^n は桁数が１つずつ上がっていって無限大に発散しそうです」と素琉も追従した．

「２人とも良い例をだしてくれました．さらにいうと，r がもっと１に近いときでも発散するという点が大事なことです．例えば，$r=1+\dfrac{1}{1億}$ のように，r がわずかに１を上回れば，$\{r^n\}$ は発散するのです」と空が補足した．

「（8）は動的表現と思うのですが，静的表現もあるのですか」と菜怜も続けて質問した．

「そもそも r が大きかったら，r^n はもっと大きいことは直観的に納得がいきますよね．重要なことは小さい r でも，r が少しでも１を上回っていたら，n をどんどん大きくしていけば，r^n もいつかは十分に大きくなるということです．言い換えると，どんな（に大きな）正の数 G に対しても，

$$n\geqq N \ \Rightarrow\ r^n>G$$

が成り立つような N を見つけることができそうですよね．これが（8）の静的表現です．例えば，$r=1+\dfrac{1}{1億}$ のとき，$G=2$万とすると，$N=10$億とすれば，$n\geqq N$ ならば $r^n>G$ を満たします．ところで，同じ記号を使ってしまいましたが，もちろんこの N は封鎖人口の N ではありません」

空はこういって，極限について，

$0<r<1$ のとき，
r^n は r 倍ずつどんどん小さくなる

$r>1$ のとき，
r^n は r 倍ずつどんどん大きくなる

という感覚が重要だと述べた．

以上のことを使って，最終目標の1つである感染症流行の有無について考えましょう，と空はいった．

$S_0 \gg I_0$ の場合のSIRモデルの解読

S_0 は I_0 よりも圧倒的に大きいとして，初期条件 (4) を課す．例えば，

$$N=1000\text{万}，\ I_0=10,\ S_0=N-I_0 \tag{9}$$

といった具合である．

「東京都に感染者が10人現れた，という感じでしょうか」と菜怜が具体例で確かめた．

「まさしく！ 東京都の人口は1400万人程度ですから，イメージとしてはその通りです」と空が答えた．

このとき，$n=1,2,\cdots$ と週が進むと，感染者のサイズ I_n は多少増える．そして，感受性者のサイズ S_n は多少減る．もしそうなったとしても，S_n は I_n よりもやはり圧倒的に大きく，$S_n \approx S_0$ であるはずだ．そこで，(1) (2) において，S_nI_n を S_0I_n に置き換えて，次の連立方程式を考える．

$$S_{n+1}=S_n-\sigma S_0 I_n\tau \tag{10}$$

$$I_{n+1}=I_n+\sigma S_0 I_n\tau-\rho I_n\tau \tag{11}$$

まず (11) を解いて I_n を求め，それを (10) に代入して S_n を求めることにする．

(11) の番号 n を1つずらして，

$$\mathscr{R}_0=\frac{\sigma S_0}{\rho} \tag{12}$$

という花文字Rゼロを導入すると，

$$\begin{aligned}
I_n&=I_{n-1}+\sigma S_0 I_{n-1}\tau-\rho I_{n-1}\tau\\
&=(1+(\sigma S_0-\rho)\tau)I_{n-1}\\
&=(1+(\mathscr{R}_0-1)\rho\tau)I_{n-1}\\
&=(1+(\mathscr{R}_0-1)\rho\tau)^2 I_{n-2}\\
&=\cdots\\
&=(1+(\mathscr{R}_0-1)\rho\tau)^n I_0
\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$r=1+(\mathscr{R}_0-1)\rho\tau \tag{13}$$

とおくと，

$$I_n=r^n I_0 \tag{14}$$

となる．さらに，

(a) $\mathscr{R}_0>1$ のとき，$r>1$

(b) $\mathscr{R}_0<1$ のとき，$0<r<1$

がわかる．

「(a) の場合はわかるのですが，(b) の場合は，$r<1$ はOKですが，

$$r=1+(\mathscr{R}_0-1)\rho\tau>1-\rho\tau>0$$

と変形して，(5) を使って $r>0$ となるのですね」と菜怜が確認した．

「いいですね！ まさしくその通りです」と空．

次に，(14) を (10) に代入すると，

$$\begin{aligned}
S_{n+1}&=S_n-\sigma S_0 I_0 r^n\tau\\
&=S_n-\mathscr{R}_0 I_0 r^n\rho\tau
\end{aligned}$$

となる．以下のように順次0になるまで番号を下げていく．

$$\begin{aligned}
S_n-S_{n-1}&=-\mathscr{R}_0 I_0 r^{n-1}\rho\tau\\
S_{n-1}-S_{n-2}&=-\mathscr{R}_0 I_0 r^{n-2}\rho\tau\\
\cdots\quad&\quad\cdots\\
S_2-S_1&=-\mathscr{R}_0 I_0 r\rho\tau\\
S_1-S_0&=-\mathscr{R}_0 I_0\rho\tau
\end{aligned}$$

これらの辺々をすべて足すと，

$$S_n-S_0=-\mathscr{R}_0 I_0(1+r+\cdots+r^{n-1})\rho\tau$$

を得る．ここで，$A=1+r+\cdots+r^{n-1}$ とおくと，$rA=r+\cdots+r^{n-1}+r^n$ だから，これら

の辺々を引いて $(1-r)A=1-r^n$ となるので，$A=\dfrac{r^n-1}{r-1}$ がわかる．これより，

$$S_n=S_0-\mathscr{R}_0 I_0\frac{r^n-1}{r-1}\rho\tau \tag{15}$$

を得る．

こうして，連立方程式 (10)(11) の解を，r を (13) として，(14) と (15) のように求めることができた．

基本再生産数 $\mathscr{R}_0$

(14) に (a)(b) の結果と極限 (7)(8) を単純に適用すると，

$\mathscr{R}_0>1$ のとき，毎週 r 倍ずつ増加して，

$$I_0<I_1<I_2<\cdots\to\infty \quad (n\to\infty)$$

$\mathscr{R}_0<1$ のとき，毎週 r 倍ずつ減少して，

$$I_0>I_1>I_2>\cdots\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となることがわかる．これより，

$\mathscr{R}_0>1 \Rightarrow$ 大規模な流行（パンデミック）

$\mathscr{R}_0<1 \Rightarrow$ 自然消滅（終息）

という区分けができる．この意味から $\mathscr{R}_0$ は流行の閾値（いきち）となっていて，これを**基本再生産数** (basic reproduction number) と呼ぶ．記号は R_0 とかくと回復者の初期値のサイズと混同してしまうので，花文字の $\mathscr{R}_0$ を用いた．

感染者のサイズ $I_n\to\infty$ の意味

「$n\to\infty$ とは，無限大の週を考えるのですか？あと，$\mathscr{R}_0>1$ のとき $I_n\to\infty$ ですが，感染者のサイズが無限大になることはあるのですか」と素琉が聞いた．

「とてもよい質問です．極限 $n\to\infty$ は『十分に時間が経ったら』の意味に置き換えて読み取るとよいです」と空は答えて，感染者のサイズの列 $\{I_n\}$ が無限大に発散することの解釈の説明をはじめた．

そもそも時間無限大 ($n\to\infty$) は現実的には考えられないし，人口は有限だから，現実にはいくらでも多い人数 ($I_n\to\infty$) を考えることもできない．

また，(11) から上の結論を得たが，(11) は，$S_n\approx S_0$ であるという仮定のもとで，S_nI_n を S_0I_n に置き換えた方程式だった．$\mathscr{R}_0>1$ として感染者のサイズ $I_n=r^nI_0$ が r 倍ずつ増えると，(15) から感受性者のサイズ S_n はその分減るので，いつまでも $S_n\approx S_0$ を仮定できるわけではないし，n を大きくすると (15) の右辺はいつかは負になるから，単純に極限 $n\to\infty$ をとることはできない．

しかし，次のような例を考えると，極限 $n\to\infty$ は十分時間が経ったときの現実をそれなりに（極端な形で）示唆している，という解釈に納得がいくはずだ．

例 初期の感染者サイズ I_0 と感受性者サイズ S_0 を (9) とし，各パラメータを $\mathscr{R}_0=3$, $\rho\tau=0.5$ とした場合を考えてみよう．このとき $r=2$ となって，(14)(15) から，第 n 週の感染者サイズと感受性者サイズはそれぞれ $I_n=10\cdot 2^n$ と $S_n=S_0-15(2^n-1)$，n 週間の累計感染者サイズは $I_1+I_2+\cdots+I_n=10(2^{n+1}-2)$ となることがわかる．例えば，$n=12$（3ヶ月）とすると，3ヶ月後の感染者サイズ I_{12} は約4万人，3ヶ月間の累積感染者サイズは約8万人．たった10人だった感染者サイズが3ヶ月で8000倍に増えたことになるから，感染症が大規模に流行しているといってよい．一方，3ヶ月後の感受性者サイズ S_{12} の初期感受性者サイズ S_0 に対する相対比は，$\dfrac{S_{12}}{S_0}\times 100\fallingdotseq 99\%$ となるので，$n=12$ くらいまでならば，$S_n\approx S_0$ と仮定して (11) を使ってもよいだろう．そうなると「$n\to\infty$ のと

き $I_n \to \infty$」の極限の意味を「3ヶ月経過したら大規模に流行した」という意味に解釈しても無理矢理感はないことがわかる．

「つまり，『$n \to \infty$ のとき $I_n \to \infty$』は，『時間が経ったら，感染者がめちゃめちゃ増えている』と思えばよいですね」と素琉が的確にまとめた．

空は，いいね！ と大きく頷いた．

「では，$I_0 = 10$ で $r = 0.5$ の場合，第4週で新規感染者サイズは1より小さくなりますが，これは1ヶ月で感染症は終息したといえるのでしょうか」と菜怜が $0 < r < 1$ の場合について質問した．

「そういってよいです．この場合も『$n \to \infty$ のとき $I_n \to 0$』の極限の意味は，素瑠くん流にいうと，『時間が経ったら，感染者がめちゃめちゃ減っている』と解釈したことになりますね」と空が答えた．

$\mathscr{R}_0 = \dfrac{\sigma S_0}{\rho}$ の意味

基本再生産数 $\mathscr{R}_0 = \dfrac{\sigma S_0}{\rho}$ の次元を考えると，

$$\frac{[(\text{サイズ})^{-1}(\text{時間})^{-1}][\text{サイズ}]}{[(\text{時間})^{-1}]} = [-]$$

となっていて，次元がないことがわかる．このような量を**無次元量**という．例えば，円周率は，

$$\text{円周率} = \frac{\text{周長}}{\text{直径}}$$

であるから，次元を考えると，

$$\frac{[\text{長さ}]}{[\text{長さ}]} = [-]$$

となって無次元量である．

「無次元量は単位（測り方）や大きさに依存しないという特徴をもっています．直径が1mmの円でも，10mの円でも，1尺の円でも，円周率は変わりません」と空が説明したら，

「$\rho\tau$ も無次元量ですよね」と菜怜が指摘した．

「はい．ρ は時間の逆数，τ は時間の次元ですから．だから無次元量を組み合わせた（13）の $r = 1 + (\mathscr{R}_0 - 1)\rho\tau$ も無次元量です」と空が答えた．

「基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ が流行の閾値の役割を果たしていることはわかったのですが，$\dfrac{\sigma S_0}{\rho}$ の意味がよくわかりません」と菜怜が聞いた．

空はそれは大事な質問なのでじっくり考えましょうといって，基本再生産数の意味を話はじめた．

感染症疫学において，基本再生産数は，次のように定義される．

> **基本再生産数の定義**
> 感受性者のみの集団に侵入した感染者が，感染させる能力を失うまでに1人あたりが再生産する2次感染者サイズの期待値．

この定義から基本再生産数 $\mathscr{R}_0$ が $\dfrac{\sigma S_0}{\rho}$ となることを導いてみよう．

$I_0 > 0$ は初期感染者の存在，すなわち，サイズ S_0 の感受性者のみの集団にサイズ I_0 の感染者が集団が侵入することを意味する．このとき，連立方程式（1）（2）に従って2次感染は拡がる．最初の侵入者，つまり I_0 に該当する人たちを1次感染者と呼ぶ．第 n 週の感染者のサイズ I_n は，1次感染者たちと彼らから感染した2次以降の感染者たちの合計である．1次感染者たちは，感受性者に感染させるだけで，感染に感染を重ねることを考えないので，回復率 ρ に従って徐々に回復していく．

その回復の具合を方程式から導くために，1次感染者の集団の第 n 週のサイズを $I_n^{(1)}$ とする．上付き添え字の（1）は1次の意味である．$I_n^{(1)}$ はこれ以上感染しない感染者たちだから，（2）の右辺第2項がない次の方程式を満たす．

$$I_{n+1}^{(1)} = I_n^{(1)} - \rho I_n^{(1)} \tau$$

初期値は$I_0^{(1)}=I_0$である．

「この方程式は，ある週の1次感染者のサイズは，前の週の1次感染者から回復率ρで回復した人たちのサイズを引いたというものですね」と菜怜が確認した．

「その通り！　結局，毎週，前の週の$1-\rho\tau$倍のサイズになるので，この方程式の解は，

$$I_n^{(1)}=r^n I_0,\quad r=1-\rho\tau \tag{16}$$

となることがわかります」と空は答えた．

ここで，条件(5)から(16)のrは$0<r<1$を満たすことがわかる．よって，極限(7)から，

$$I_n^{(1)}=r^n I_0\to 0\quad(n\to\infty) \tag{17}$$

を得る．つねに$I_n^{(1)}>0$であるから，1次感染者は有限のnで感染させる能力を失うことはない．

次にサイズ$I_n^{(1)}$の1次感染者が感染させる第n週までの2次感染者のサイズを$I_n^{(2)}$とする．上付き添え字の(2)は2次の意味である．感受性者のサイズがつねにS_0の集団において$I_n^{(2)}$は，次の方程式を満たす．

$$I_{n+1}^{(2)}=I_n^{(2)}+\sigma S_0 I_n^{(1)}\tau \tag{18}$$

初期値は$I_0^{(2)}=0$である．

「この方程式の意味がよくわかりません」と菜怜が聞いたので，空は$n=0$から順番に考えていきましょうといった．

まず，$n=0$のとき，$I_0^{(2)}=0$, $I_0^{(1)}=I_0$より，(18)は，

$$I_1^{(2)}=\sigma S_0 I_0\tau$$

である．すなわち$I_1^{(2)}$は，サイズS_0の感受性者集団に侵入したサイズI_0の1次感染者によって再生産された2次感染者のサイズに他ならないことを意味している．次に，$n=1$のとき，この$I_1^{(2)}$に加えて，サイズS_0の感受性集団に侵入したサイズ$I_1^{(1)}$の第1週目の1次感染者によって再生産された2次感染者のサイズは$I_2^{(2)}$となる．つまり，(18)で$n=1$とした，

$$I_2^{(2)}=I_1^{(2)}+\sigma S_0 I_1^{(1)}\tau$$

を得る．

「感受性者のサイズはつねにS_0なのですね．ここがわかれば後は同じなので(18)がわかりました」と菜怜は納得した．

(16)を(18)に代入すると，

$$I_{n+1}^{(2)}=I_n^{(2)}+\sigma S_0 I_0 r^n\tau$$

となる．以下のように順次0になるまで番号を下げていく．

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}-I_{n-1}^{(2)}&=\sigma S_0 I_0 r^{n-1}\tau\\
I_{n-1}^{(2)}-I_{n-2}^{(2)}&=\sigma S_0 I_0 r^{n-2}\tau\\
\cdots\qquad&\qquad\cdots\\
I_2^{(2)}-I_1^{(2)}&=\sigma S_0 I_0 r\tau\\
I_1^{(2)}&=\sigma S_0 I_0\tau
\end{aligned}$$

これらの辺々をすべて足すと，(15)の右辺第2項を導いたときのように，

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}&=\sigma S_0 I_0(1+r+\cdots+r^{n-1})\tau \qquad (19)\\
&=\sigma S_0 I_0\frac{r^n-1}{r-1}\tau\\
&=\sigma S_0 I_0\frac{1-r^n}{\rho} \qquad (20)
\end{aligned}$$

を得る．最後の等号は，分母のrに$r=1-\rho\tau$を代入し，τを約分して求めた変形である．

(17)でみたように，1次感染者は$n\to\infty$で感染させる能力を失う．この間に1次感染者が再生産する2次感染者のサイズは，いわば第∞週までのサイズであるから$\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)}$となる．この極限値の1次感染者の初期サイズ$I_0$に対する比の値が，基本再生産数$\mathscr{R}_0$の定義でいう所望の期待値である．

よって，(20)と極限(7)を用いて，

$$\mathscr{R}_0=\frac{\lim_{n\to\infty} I_n^{(2)}}{I_0}=\frac{\sigma S_0}{\rho}\lim_{n\to\infty}(1-r^n)=\frac{\sigma S_0}{\rho}$$

を得る．

「以上が，定義から導出した$\mathscr{R}_0$の値です」と空がまとめた．

「なるほど．確かに$\mathscr{R}_0$の定義から結果的にそれが$\dfrac{\sigma S_0}{\rho}$となることはわかったのですが，$\dfrac{\sigma S_0}{\rho}$の分母分子の役割が，まだピンときません」と菜怜が感想を述べた．

「導出が技巧的でしたので，ピンとこないのはもっともです．そこで今度は，基本再生産数を$\mathscr{R}_0=\sigma S_0\times\dfrac{1}{\rho}$と分解してみてみましょう」と菜怜に同意して空はいった．

平均感染期間 $\dfrac{1}{\rho}$

「まず，σは感染者から感受性者への感染のしやすさを表すパラメータで，(サイズ)$^{-1}$(時間)$^{-1}$という次元をもちました．だから，σS_0の次元は(時間)$^{-1}$です．これに1次感染者のサイズI_0をかけたものが2次感染者のサイズとなるのだから，σS_0は単位時間あたり再生産される2次感染者の感染率です．また，ρは単位時間あたりの回復率です．ρの次元は(時間)$^{-1}$です」と空が説明をはじめた．

「では，ρ^{-1}の次元は（時間）なのですね」と菜怜がすぐに反応した．

「はい．ρ^{-1}は何の時間かを考えてましょう」と空がいった．

（19）の右辺の$\sigma S_0 I_0$に掛かっている量だけを取り出して，

$$T_n=(1+r+\cdots+r^k+\cdots+r^{n-1})\tau$$

とおく．もともと（16）から，$r^k=\dfrac{I_k^{(1)}}{I_0}$であったので，

$$T_n=\left(1+\frac{I_1^{(1)}}{I_0}+\cdots+\frac{I_k^{(1)}}{I_0}+\cdots+\frac{I_{n-1}^{(1)}}{I_0}\right)\tau$$

とかける．ここで，$\dfrac{I_k^{(1)}}{I_0}$は初期感染者が第k週も感染者である確率で，$\tau=1\text{week}$としているから，T_nは第0週から第$n-1$週までのn週間の感染期間の期待値（平均値）になっている．

こうしてT_nの意味がわかった．（20）の右辺で導出した$T_n=\dfrac{1-r^n}{\rho}$と極限（7）を用いて，$n\to\infty$としたときのT_nの極限値は

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\frac{1}{\rho}$$

と求まる．この極限値は，$\lim\limits_{n\to\infty}T_n$の意味から，感染者が感染させる能力を失うまでの期待時間，言い換えると平均感染期間と見なすことができる．つまり$\dfrac{1}{\rho}$は平均感染期間を意味することがわかった．例えば，回復率ρが小さい（0に近い）と，なかなか回復せず，平均感染期間$\dfrac{1}{\rho}$はその分長くなることになるが，これは直観に違わない．

以上より，基本再生産数を$\mathscr{R}_0=\sigma S_0\times\dfrac{1}{\rho}$と分解してみると，

> 基本再生産数とは，サイズS_0の感受性者の集団に侵入した1人の感染者が単位時間当たりに再生産する2次感染者の感染率σS_0に平均感染期間$\dfrac{1}{\rho}$を乗じた数

のような解釈が可能であることがわかった．

「今日は基本再生産数を使って感染症の流行の有無を考えました．次回は最終的な感染状態，つまり流行の結末について考えましょう」

空はこういって，今回の対話を終了した．

（やざき　しげとし／明治大学）