

感染症流行の SIR 数列モデル (II)

矢崎成俊

登場人物：

須宇賀 空 (すうが・そら), フリーの実験数楽者
堂仁加 菜伶 (どうにか・なれ), 高校2年生
堂仁加 素琉 (どうにか・する), 高校1年生

ここは日本のどこか。数楽で遊ぶ家。

アシスタントの堂仁加菜伶と弟の素琉が、いつもの通り、空さん、こんにちは！と元気よく入ってきた。

「こんにちは。今日はまず前回の続き、数列の極限の話から始めましょう」

家主の須宇賀空は、2人を和やかに出迎えながらいった。

● 数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ の極限 (おさらい)

数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ について、

n を限りなく大きくしたとき、
 $\frac{1}{10^n}$ が限りなく 0 に近づく (1)

ことを、

数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ は極限值 0 に収束する (2)
といった。

(2) を数学的な記号を用いて、次のように表現した。限りなく (→) という動きを感じさせる形容詞 (記号) を使っているので、動的な数学表現ということにする。

動的表現 (直観的, 主観的)

- $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$
- $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

3つの表現はいずれも (2) を記号化しただけのものなので、動的表現にふりがなを振ったとしたら (2) になる。そして、(2) の意味は (1) である。

となると (1) の意味が誰が読んでも明解に同じ解釈にならなければならない。しかし「限りなく大きく」「限りなく 0 に近づく」の部分は、

$$\frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{00 \cdots 01}_n$$

において、 n を大きくしていけば 1 の位置が下がっていつて、0 が増えていくから、きつと 0 に近づいていくのだろう、などと分かった気になるという意味で直観的だし、どのように限りなく大きくなるのか、限りなく 0 に近づくとはどういうことか、について十人十色の答えがあるだろうから主観的である。したがって、動的表現は直観的で主観的といえる。

一方、前回の最後の節で、次のように (2) を表現した。「近づく」などという動きが伴わないので、これを静的表現と呼ぶことにする。

静的表現 (操作的, 客観的)

どんな (に小さな) 正の数

$$\varepsilon = 0.\underbrace{00 \cdots 0}_m \text{■■■■} \cdots \quad (3)$$

に対しても、 $N = m+1$ とおけば、

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{10^n} < \varepsilon \quad (4)$$

が成り立つ。ここで、

小数点以下 m 桁目の■■には、

1~9 の数字が入る。

$m+1$ 桁以降の*には、

0~9 の数字が入る。

ε は有限小数でも無限小数でもよい.

例 1. $\varepsilon = \underbrace{0.00000002}_{8}0395 \quad (m = 8)$

例 2. $\varepsilon = 0.789789789 \cdots \quad (m = 1)$

空がここまで話したら,

「 ε は (3) の形ではないといけないのですか?」と素琉が聞いた.

「(3) の形で一番大きい ε は $\varepsilon = 0.999 \cdots = 1$ です. ε はどんな正の数でもよいので $\varepsilon > 1$ でもよいです. そのときは $N = 1$ とおきます. そうすればつねに (4) が成り立ちます」と空は答えた.

結局, どんな正の数 ε に対しても, (4) が成り立つような N が見つかったら 0 に収束し, 見つからなかったら収束しないという判定が出来るので, その判定法は操作的で, 判定結果は明快に定まるので客観的である.

「限りなく ($\rightarrow$) という動きがないので, 静的表現というのですね」

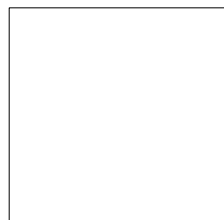
菜怜がまとめたら, 空はその通りと頷きながら, 別の例をみてみましょうといった.

● 半分, 半分, 半分, ……

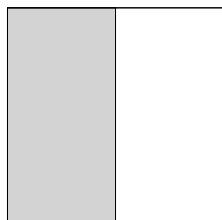
1 辺の長さ 1 の正方形 (単位正方形) の半分 (灰色) の面積を A_1 とすると,

$$A_1 = \frac{1}{2}$$

である. A は面積 (area) の頭文字.



単位正方形



$A_1 = 0.5$

A_1 に残り (白色) の半分の面積を足した面積

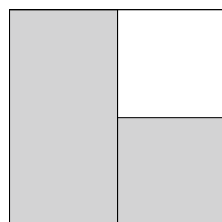
を A_2 とすると,

$$A_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$$

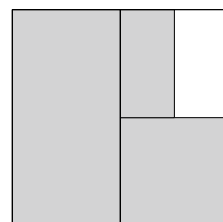
で, さらに A_2 に残り (白色) の半分の面積を足した面積を A_3 とすると,

$$A_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$$

である.



$A_2 = 0.75$



$A_3 = 0.875$

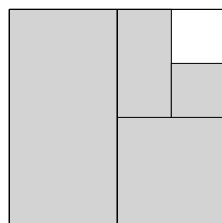
一般に,

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

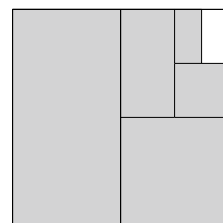
とすると, 単位正方形の面積は 1 だから, A_4 ではじめて全体の面積 1 の 90% を超える. 以降,

A_7 ではじめて 99% を超え,

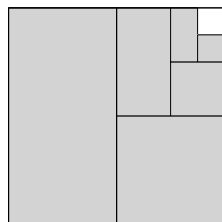
A_{10} ではじめて 99.9% を超える.



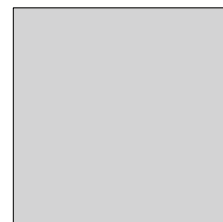
$A_4 = 0.9375$



$A_7 = 0.9921875$



$A_{10} = 0.9990234375$



$A_\infty = 1$

このまま n を限りなく大きくしていくと, 単位正方形がすべて灰色になるだろう. 言い換えると, 白色の部分の面積が 0 に収束するだろう, と予想される. 灰色の部分の面積が A_n のとき,

白色の部分の面積は $\frac{1}{2^n}$ だから、予想は、

動的表現 $n \rightarrow \infty$ のとき $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$

である。したがって、示すべきことは、

静的表現 どんな (に小さな) 正の数 (3) に対しても、

$$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon = \underbrace{0.00 \cdots 0}_{m \text{ 個の0}} \cdots \quad (5)$$

が成り立つような N を見つけること、である。

「 $\blacksquare$ には1~9の数字が入るのですよね。だから $\frac{1}{10^m} \leq \varepsilon$ か」と素琉がつぶやいた。

「いいつぶやき！ だから $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^m}$ となる n

を見つければよいんだね」と菜怜が勢いついた。

「ヒントは $10 < 16$ です」空も加勢した。

あつ、わかった。菜怜が説明を始めた。

「 $16 = 2^4$ なので、 $10^m < 2^{4m} \leq 2^n$ ならば、引繰り返して $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{4m}} < \frac{1}{10^m}$ となります。素琉がつぶやいたように $\frac{1}{10^m} \leq \varepsilon$ なので、 $n \geq 4m$ であれば、

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{4m}} < \frac{1}{10^m} \leq \varepsilon$$

を満たします。だから、 $N = 4m$ とすれば (5) が成り立ちます」

「いいですね！」と空はいい、数列 $\{A_n\}$ の極限に関する説明を始めた。

$A_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ なので、動的表現で、

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } 1 - A_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$$

がわかった。これを

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } A_n \rightarrow 1$$

と書いて、

数列 $\{A_n\}$ は極限值 1 に収束する

という。数列 $\{A_n\}$ の極限値を

$$A_\infty$$

と書いたとすると、 $A_\infty = 1$ ということになる。

極限値の記号は混乱しなければどんな記号も使える。例えば、 A や a でもよい。

空は最後に一般化した話を図説した。

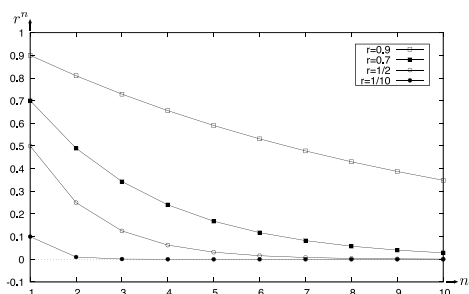
「2つの数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ と $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ が、両方とも 0 に

収束することを見ました。それぞれの数列は

$$\frac{1}{10^n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n, \quad \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と書けるので、一般化して、 $0 < r < 1$ を満たす r について、数列 $\{r^n\}$ の極限を考えましょう。

下図は、 $r = 1/10, 1/2, 0.7, 0.9$ についての数列の様子です。横軸が n 、縦軸が r^n です。見やすいように、各点列を線で結びました」



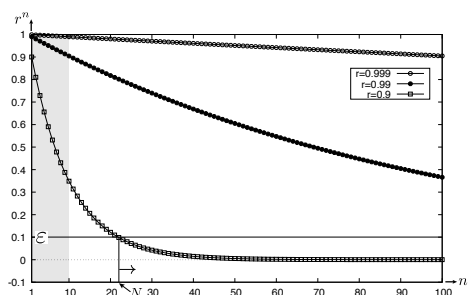
「 $r = 1/10$ (●) のときは、すぐに 0 に近づいています。 $r = 0.7$ (■) のときは、 $n = 10$ でやっと 0 に近くなってきました。実際、 $0.7^{10} \doteq 0.03$ です。ところが $r = 0.9$ (□) のときは、 $n = 10$ でもまだ 0.3 と 0.4 の間です」

2人は点列をよく観察している。

「 $r = 0.9$ のときは、0 に収束するのでしょうか」と素琉。

「もっと大きい n まで描いた図を見ましょう」

空はにこりとして、次の図を見せた。



「図左の灰色部分が先の図に対応しています」

「お！ $r = 0.9$ (□) のときも 0 に収束しているように見えます。でも $r = 0.99$ (●) と $r = 0.999$ (○) のときは、また怪しい雰囲気で

す」と素疏.

「確かに. $r = 0.99$ や $r = 0.999$ のときは, もっと大きい n まで描かないといけませんね. 例えば, $n = 2302$ のとき 0.999^n ははじめて 0.1 を下回ります. ところで, 図をよくみるとわかりますが, $\varepsilon = 0.1$ のとき, $N = 22$ とすれば, 図中の→のように, (5) と同じ形式の

$$n \geq N \Rightarrow 0.9^n < \varepsilon$$

が成り立ちます. 実際, $0.9^{22} \approx 0.098 < 0.1$ です. これらの例から予想できることは, $0 < r < 1$ のとき, 数列 $\{r^n\}$ は 0 に収束するだろうことです. 証明は省きますが, 一般に,

$$0 < r < 1 \text{ のとき } r^n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

が成り立ちます」

空は2人の得心がいつている顔をみて,

「極限の話はここで終了します. 極限 (6) の結果は, 後で何回か使います. 少し間があいたので, 思い出しながら感染症の話にもどりましょう」と続けた.

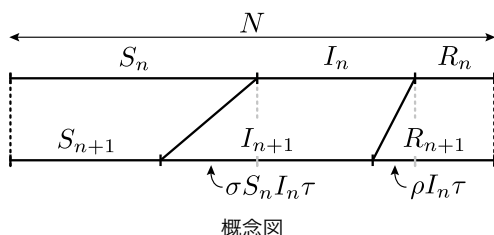
SIR 数列モデル (おさらい)

前回から考えていた感染症流行に関するモデルは, 封鎖人口を N とした SIR 数列モデル

$$S_{n+1} = S_n - \sigma S_n I_n \tau \quad (7)$$

$$I_{n+1} = I_n + \sigma S_n I_n \tau - \rho I_n \tau \quad (8)$$

であった. τ は時間の係数で $\tau = 1$ week とする. SIR 数列モデルは, 第 n 週の感受性者数 S_n と感染者数 I_n の翌 $n+1$ 週への推移モデルで, それは以下のような概念図で描くことができた.



ここで, ρ は単位時間あたりの回復率, σ は感染者から感受性者への感染のしやすさを表

す感染伝達係数で, サイズ⁻¹時間⁻¹という次元をもつ (サイズは人数と思って良い). 回復者数 R_n の式がないのは, 封鎖人口の仮定 $N = S_n + I_n + R_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) から, S_n と I_n がわかれば R_n が求まるからだ.

最初の週 (第0週) に感染者が発生し, 回復者はゼロだとする. すなわち,

$$S_0 > 0, I_0 > 0, R_0 = 0 \quad (9)$$

を初期値の仮定として, その後の $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, S_n と I_n がどのように変化するかを連立方程式 (7) (8) を解いて追跡する. 最終目標は次の2つである.

感染症のない状態に感染者が少数侵入したとき, 感染症が流行するか否かという**流行の有無**と, 感染症流行が進行して十分に時間が経ったときの感染者の割合 (最終規模) などの最終的な感染状態, すなわち**流行の結末**である. 感受性者数 S_n の $n \rightarrow \infty$ のとき (十分に時間が経ったとき) の極限值 S_∞ との差 $S_0 - S_\infty$ が最終的に感染者となった数であり, この数と初期の感受性者数 S_0 との相対的な比の値 $\frac{S_0 - S_\infty}{S_0}$ が感染者の最終規模である.

2つの仮定

空はざっと前回のおさらいをした. 素疏と菜恰の2人も, SIR 数列モデルの解 $\{S_n\}, \{I_n\}$ がどのように振る舞うのか, いよいよわかるのだと意気込んでいる.

「これから, 2つの仮定を課します」

空は説明を始めた.

仮定1 ρ は単位時間あたりの回復率であるので, $\tau = 1$ week ならば, $\rho\tau$ は1週間の回復率である. 概念図を見るとわかるように, もし $\rho\tau = 1$ ならば, 感染者は新たな感染者を除いて翌週には全員回復する. 細かな感染状況の変化をみるために, 条件

$$\rho\tau < 1 \quad (10)$$

を仮定する。例えば、 $\tau = 1 \text{ week}$, $\rho^{-1} = 2 \text{ weeks}$ ならば、 $\rho\tau = 0.5$ なので、1週間の回復率は50%となる。 ρ^{-1} は後述(次回説明)するように平均感染期間という意味を持つ。よって、(10)は平均感染期間 ρ^{-1} よりも小さい τ を考えよという条件である。

仮定2 前回述べたように、 σI_n は単位時間あたりの感染率だから、 $\tau = 1 \text{ week}$ ならば、 $\sigma I_n \tau$ は第 n 週から1週間の感染率である。概念図を見るとわかるように、もし $\sigma I_n \tau = 1$ ならば、感受性者は第 $n+1$ 週には全員感染者になる。やはり細かな感染状況の変化をみるために、各週に共通した感染率の上限の条件

$$\sigma N \tau < 1 \quad (11)$$

を仮定する。感染伝達係数 σ は各感染症によりデータが得られているから、これは封鎖人口 N の大きさと τ に関する仮定とみるべきだ。この仮定のもとで、(7)と $I_n \leq N$ より、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &\geq S_n - \sigma S_n N \tau = (1 - \sigma N \tau) S_n \\ &\stackrel{(*)}{\geq} (1 - \sigma N \tau)^2 S_{n-1} \geq \cdots \\ &\geq (1 - \sigma N \tau)^{n+1} S_0 \\ &> 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

となって、感受性者が有限時間で全員感染することはないことがわかる。

「2番目の不等号(*)は、(7)で n を $n-1$ にした

$$S_n = S_{n-1} - \sigma S_{n-1} I_{n-1} \tau$$

と $I_{n-1} \leq N$ を用いたのですね」と菜怜がすぐに確認した。

「その通りです。後は n を一つずつ下げていて、 $n=0$ になるまで同じことを繰り返します」

空は菜怜の確認に嬉しそうに答えた。そして2人に、2つ質問します、といった。

● 特殊な場合の SIR 数列モデルの解説

「第1問です」

第1問 (9)ではない次の初期条件を考える。もし、最初の週(第0週)に感染者も回復者もいなくて、初期条件が

$$S_0 > 0, I_0 = 0, R_0 = 0 \quad (13)$$

であったとする。封鎖人口の仮定から $S_0 = N$ となる。このとき、(7)(8)を用いて、 S_n, I_n, R_n を求めよ。

「第1週も

$$S_1 = S_0 = N, I_1 = I_0 = 0, R_1 = R_0 = 0$$

となって、最初の週と全く同じになります。第2週以降も同じです」と菜怜は即答した。

「感染者がいなかったら、一人も感染しないということか」と素直もいった。

「簡単でしたね。SIR 数列モデル(7)(8)は、初期条件が(13)であった場合に、感染者がその後も一人もいないという当たり前の解も含んでいるということが確認できました」

空は続けていった。

「今後の初期条件は(9)を考えますが、特に、

$$S_0 \gg I_0 > 0, R_0 = 0$$

であるような状況、すなわち大多数の人が感受性者で、ほんの少し感染者が出現した場合を初期条件としたら、その後、どのように推移していくかに注目します」

「 $S_0 \gg I_0$ は、 S_0 は I_0 よりずっと大きいという意味ですか」と菜怜が聞いた。

「その通りです。ただし、どのくらいずっとかは決まっていません。ただの大小関係 $S_0 > I_0$ ではなく、桁違いの大きさの違いがある場合を想定したいときに使います。もし感染者が最初から多数いたら、感染症はすでに流行している状態なので、どのように流行を抑えるかが考えるべき点になるでしょう。SIR 数列モデルでは、(感受性者数に対して相対的に)ほんの少数の感染

者がいるだけでもあつという間に流行するのか否かという点に着目します」

菜怜の質問で、改めて論点が明らかになったところで、空は第2問を出題した。

第2問 初期条件を(9)とし、感染者は誰も回復しないと仮定する。つまり、回復率を $\rho=0$ とする。このとき、 S_∞ と I_∞ を求めよ。

「不等式を使うなじみのない解き方でしょうから、一緒に考えていきましょう」と空はいった。

まず、 $\rho=0$ なので、(7)(8)から連立方程式

$$S_{n+1} = S_n - \sigma S_n I_n \tau \quad (14)$$

$$I_{n+1} = I_n + \sigma S_n I_n \tau \quad (15)$$

を解けばよいことがわかる。(14)と(15)を辺々足すと、

$$S_{n+1} + I_{n+1} = S_n + I_n$$

となる。よって、初期条件(9)、特に $R_0=0$ から、

$$S_n + I_n = S_0 + I_0 = N \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

を得る。これと封鎖人口の仮定 $N = S_n + I_n + R_n$ から、

$$R_n = R_0 = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるので、回復者は一人もいないことがわかる。

「ここまではオッケーです」と素琉。

「回復率ゼロだから、納得です」と菜怜。

ここから不等式を使っていきます、と空はいって説明を続けた。

次に、初期条件(9)と、(15)で $n=0$ の場合から、

$$I_1 = I_0 + \sigma S_0 I_0 \tau > I_0 > 0$$

がわかる。(12)の結論 $S_n > 0$ を用いて、順次 $n=1, 2, \dots$ に対して、

$$I_{n+1} = I_n + \sigma S_n I_n \tau > I_n$$

が示され、数列 $\{I_n\}$ は単調に増加することがわかる。

「初期条件(9)から $\sigma S_0 I_0 \tau > 0$ となつて、 $I_1 > I_0$ を得ることはわかりました。次に、あつそうか、 $S_n > 0$ と $I_1 > I_0 > 0$ から $I_2 > I_1$ がわかるのですね」

菜怜は単調増加性の導出を質問しようとして、自己完結して納得したようだ。

「そうやって、順番に考えていって、

$$0 < I_0 < I_1 < I_2 < \dots$$

がいえるのかあ。どこまで大きくなるのだろうか」と素琉がつぶやいた。

「どこまでも大きくなるわけではないです。そもそも $I_n \leq N$ ですから。しかも、大きくなる途中のある n で、 $I_n = N$ となることもないです」と空は答えた。

実際、もしある n で $I_n = N$ となつたら、(16)から $S_n = 0$ であるが、これは $S_n > 0$ ((12)の結論)に反する。

S_∞ を求めよう。 $I_n > I_0$ と(14)より、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (1 - \sigma I_n \tau) S_n < (1 - \sigma I_0 \tau) S_n \\ &= (1 - \sigma I_0 \tau) (1 - \sigma I_{n-1} \tau) S_{n-1} \\ &< (1 - \sigma I_0 \tau)^2 S_{n-1} < \dots \\ &< (1 - \sigma I_0 \tau)^{n+1} S_0 \end{aligned}$$

から、 $n=1, 2, \dots$ について、

$$S_n < (1 - \sigma I_0 \tau)^n S_0 \quad (17)$$

を得る。 $I_0 < N$ と(11)から、 $0 < 1 - \sigma I_0 \tau < 1$ なので、極限(6)を用いると、

$$(1 - \sigma I_0 \tau)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

がわかる。よって、 $n \rightarrow \infty$ のとき(17)の右辺は0に収束する。だから左辺の S_n も0に収束し、 $S_\infty = 0$ がわかる。そして、(16)から $I_\infty = N$ となる。つまり、誰も回復しない場合、感染伝達係数 σ の値がいくら小さかったとしても、ほんの少しの初期感染者がいるだけで、 $n \rightarrow \infty$ のとき、つまり十分に時間が経過すると、感受性者は消滅し、全員感染者になる。

「回復しないとまったく困りますね」と菜怜がいった。

空は頷きながら、次回、一般の場合のSIR数列モデルの解説をしましょう、といって今回の対話を終了した。

(やざき しげとし／明治大学)