対話 5

感染症流行の SIR 数列モデル（Ⅰ）

矢崎成俊

登場人物：
須宇賀 空（すうが・そら），フリーの実験数楽者
堂仁加 菜怜（どうにか・なれ），高校２年生
堂仁加 素琉（どうにか・する），高校１年生

ここは日本のどこか．数楽で遊ぶ家．

今日も楽しい数学になる予感．家主の須宇賀空(すうがそら)は，アシスタントの堂仁加菜怜(どうにかなれ)と弟の素琉(する)をを思ったとき，２人が元気よく入ってきた．

「空さん，こんにちは！」

「こんにちは．今回も感染症の話題を続けましょう．まだまだ話足りません」

空はそういって，前回のおさらいを始めた．

前回のおさらい

ある地域で発生した伝染性のウイルス流行の数学モデルを考える．簡単のために，その地域は封鎖されていて，外部と交流がなく，誕生も死亡もなく，人口は増減しないという仮定を課す．すなわちその地域の人口は一定値 N をとるとする．

その地域の住民を３つの互いに素なグループに分ける．

グループ S　感染する可能性はあるが，まだ感染していない感受性者．その人数を S とする（susceptible（感受性のある）の頭文字）．

グループ I　感受性者に感染させることができる感染者．その人数を I とする（infective（感染させる）の頭文字）．

グループ R　感染したが回復して免疫を獲得し，２度と感受性者にならない回復者．その人数を R とする（recovered（回復した）の頭文字）．

S, I, R は人数といったが実数の値をとるとする．

１週間ごとにそれぞれのグループの人数の変化があるとして，

第 n 週の感受性者数を S_n

第 n 週の感染者数を I_n

第 n 週の回復者数を R_n

とする．３つのグループは互いに素で，人口一定だから，

$$N = S_n + I_n + R_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

を満たす．

「S は未感染者のグループといってもよいのですか」

菜怜が聞いたら，大雑把にはそういってもよいです，と空は答えたが，細かいことをいうと……，といって補足説明を続けた．

素朴に未感染者といった場合，対象としているウイルスの免疫をもともと保持しているがまだ感染していない人，感染者と接触しない場所（孤島や病院など）にいる人なども含まれる．そのような人たちは，感染しうる人とは呼べないのではじめからグループ R に入っていると考える．そうすると，グループ R は，最初から感染の対象外の人も含めた隔離（removed）の意味で

の R となる．だからグループ R は，回復と隔離の両方の意味を持たせてもよい．

一方，感染と関係ないならば，最初から人口 N に含めなくてもよいと考えて，隔離者は考察の対象外とすれば，未感染者は全員感受性者となるから，この場合は S を未感染者のグループと呼んでも差し支えない．

「感染したら，すぐに発症するのですか？」と，今度は素琉が聞いた．

「こちらもよい指摘です．通常は，感染したら，ある一定の潜伏期間を経て発症することが多いです．発症後に感染能力をもつ場合もあれば，潜伏期間中に誰かに感染させることもあります．そのような人を考慮して，S, I, R の他に，感染してから感染能力を持つまでの感染性待ち時間の状態の人のグループ E をモデルに組み込む場合もあります（exposed の頭文字）．今回のモデルは，前回と同様に，感染したらすぐに感染させる能力を持つことにします」

その他，回復してもしばらくたったら（免疫能力がなくなって）また感受性者に戻ってしまう場合など，沢山のモデルが考えられる．今回は，前回同様もっとも基礎的で，登場人物が S, I, R だけのモデルを扱おう，と空はまとめた．

感染率

感受性者のうち感染者になる割合を感染率と呼ぶ．単位時間あたりの感染率を $f(I)$ とすると，$Sf(I)$ が（単位時間あたりに）感染者となる．

前回は，ある固定した感染者数 $I_* > 0$ を導入して，感染者数 I が I_* より大きくなったら一定の感染率 $f(I) = \alpha > 0$ を持ち，そうでないときは感受性者は感染しないとした．

今回は，

$$f(I) = \sigma I$$

とする．ここで，$\sigma > 0$ は感染者から感受性者への感染のしやすさを表す感染伝達係数で，感染率 σI は，時間$^{-1}$ という次元をもつから，感染伝達係数 σ は，サイズ$^{-1}$ 時間$^{-1}$ という次元をもつ（サイズは人口や人口密度のような大きさ）．

「S かける σI が，単位時間あたりに増える感染者数になるのですね」

菜怜がいうと，

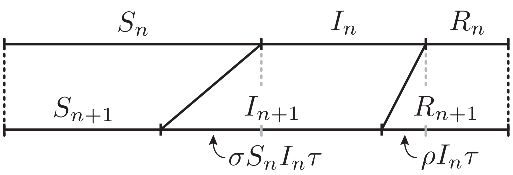
「じゃあ，S かける σI かける τ が，τ 時間に増える感染者数になるのですね」

素琉も続けた．

「その通り！　いよいよモデルを作りましょう」

SIR 数列モデル

以上の考えのもとで，前回同様，単位時間あたりの回復率を ρ とすると，第 n 週から第 $n+1$ 週へのそれぞれのグループの人数の推移は次のような概念図に書くことができる．



これを連立方程式で書くと以下のようになる．

$$S_{n+1} = S_n - \sigma S_n I_n \tau \tag{2}$$

$$I_{n+1} = I_n + \sigma S_n I_n \tau - \rho I_n \tau \tag{3}$$

$$R_{n+1} = R_n + \rho I_n \tau \tag{4}$$

ここで $n = 0, 1, 2, \cdots$ で，$\tau = 1\,\mathrm{week}$ としている．この連立方程式を SIR 数列モデルと呼ぶことにする．

最初の週（第 0 週）に感染者が発生し，回復者はゼロだとする．すなわち，初期値を

$$\begin{cases} S_0 > 0,\ I_0 > 0,\ R_0 = 0 \\ S_0 + I_0 + R_0 = N \end{cases}$$

とし，その後の $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，S_n, I_n, R_n がどのように変化するのかを追跡する．連立

方程式 (2) (3) (4) の両辺をそれぞれ足し合わせると，

$$S_{n+1}+I_{n+1}+R_{n+1}=S_n+I_n+R_n$$

となるから，封鎖人口の仮定 (1) に矛盾しない．よって，S_n, I_n がわかれば，

$$R_n=N-(S_n+I_n) \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

として，回復者数がつねに求まるので，連立方程式 (2) (3) だけを考えれば十分である．以上のことは前回と同様である．

菜怜は，頭の中を整理するようにいった．

「前回の数学モデルと今回の SIR 数列モデルの違うところは，$f(I)$ の与え方だけですか」

「そうです．前回のモデルの特徴は，I がある程度（ある固定した I_* より）大きくなると，I の大きさに直接左右されずに S のみに比例して，単位時間あたり αS の新規感染者数が増加します」

空がいったら，

「そうすると感受性者の周りにいる感染者数が増加しても，感染率は変わらないということなのですね」と，菜怜はかえした．

「はい．感染者数が増減しても，感受性者数が減少しても，つねに一定の割合の感受性者が感染するという，ある限定的な状況を想定したのが，前回のモデルです」

さらに，今回のモデルについて，空は次のように付け加えた．

単位時間あたりに σSI だけ感染者が増えるというのが今回のモデルで，新規感染者数が S のみならず，I にも比例しているのが特徴である．

実際，$\sigma SI=(\sigma S)\times I$ とみると，

> σS は，感受性者数 S に侵入した 1 人の感染者（1 次感染者）が単位時間あたりに生産する 2 次感染者数

であるから，それに I をかけた σSI は，単位時間あたり生産される新規感染者数（総 2 次感染者数）といった見方ができる．

知りたいこと

SIR 数列モデルに限らず，一般に感染症流行モデルで明らかにしたいことは，大きく次の 2 つである．

流行の有無　感染症のない状態に感染者が少数発生（侵入）したとき，感染人口の増大（流行）が発生するか否か．

流行の結末　感染症流行が進行した場合，十分に時間が経ったときの感染者の割合（最終規模）などの最終的な感染状態．

少し難しそうな顔をしながら，菜怜が聞いた．

「前回のモデルだと，I_0 が I_* 以下だと感染は流行しませんでした．I_* より大きいと感染は一端増加して，どこかで減少しはじめました．そしてある時刻で感染者数が I_* 以下まで減って，その後は急速に感染者が減少しました．最終的な感染状態は感染者ゼロでしょうか」

空は頷きながら，最後は感染者ゼロになりましたね，と答えた．続けて，感受性者数についてコメントした．

（前回のモデルでは）感染者数が I_* 以下になった時刻以降，感受性者数は一定だった．その一定の感受性者数を S_∞ と書くと，その時刻以降，感受性者数はずっと S_∞ であった．初期の感受性者数は S_0 だったので，S_0-S_∞ が最終的に感染者となった数である．この数と初期値 S_0 との比の値

$$\frac{S_0-S_\infty}{S_0}$$

が感染者の最終規模となる．

「なんで S_0 で割るのですか」と，素琉がすぐに反応した．

「よい疑問です．例えば，$S_0-S_\infty=$ 100 万人だったとしましょう．100 万人は多いですか」

「多いです」

素琉は，うん，うん，と２回頷いた．

「確かに 100 万という数字は，何だか大きいよね．円だったら欲しい」

２人も笑いながら同調した．素琉はドルの方がもっといいかもと突っ込んだ．

「でも，$S_0=200$ 万人の場合と，$S_0=1$ 億人の場合を考えてみると……」

「そうか，200 万人なら半分，１億人なら１％が感染したことになるのか．だから，多いか少ないかは数そのものよりも比の方がわかりやすいのですね」と，空の言葉が終わる前に，菜怜が割合を計算し，相対評価の意味を投げかけた．

「ところで……，S_∞ って何ですか．∞ を無限大と読むことは知っていますし，数列 $a_1, a_2, \cdots$ を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と書くこともわかっているのですが」

素琉は，今更ながらという感じに聞いた．

「平たくいうと永遠の果ての意味ですが，感受性者数の永遠の果てって何だと思いますよね．SIR モデルの詳しい解析にも必要ですし，無限大 ∞ についてじっくり考えましょう」

空はこういって，無限大と極限について話はじめた．

無限大と極限

「$1, 2, 3, \cdots$ という自然数の列はどこまで続くでしょうか」

空が聞いたら，どこまでも続きます，素琉が即答した．

「そうです．どこまでも続く上に，どこまでも大きくなります．限りなく」

「つまり，自然数に最大値はないということですね」

菜怜は言い換えて反応した．

「はい．ちょっと横道にそれますが，もし最大の自然数があったら，それは１である，という小話をしましょう」

２人は身を乗り出して聞いている．

最大の自然数があったとして，それを M をする（M は max の頭文字）．M は自然数だから，$1 \leqq M$ である．この不等式の両辺に M を掛けると $M \leqq M^2$ である．自然数と自然数の積はまた自然数だから，M^2 は自然数である．よって，M は最大の自然数だから，$M^2 \leqq M$ である．先の不等式と合わせると，$M \leqq M^2 \leqq M$ となり，$M^2=M$ を得る．両辺を M で割って，$M=1$ わかる．

うーむ．素琉がうなったら，

「これは，最大の自然数があるという仮定が間違っていたから矛盾がおきたのですね」

菜怜が論理的にまとめた．

「その通りです．自然数には，ある n を自然数とするとその次の $n+1$ も自然数である，という性質があります．そして自然数は１から始まります．これらは自然数を特徴付けるものです．これより，

$$1,\ 2:=1+1,\ 3:=2+1,\ 4:=3+1,\ \cdots$$

（$A:=B$ は，A を B で定義するという意味）

と順次，無数の自然数が定まって，限りなく大きくなっていきます．もし，限りがあって M が最大の自然数と謳っても $M+1$ も自然数だから M が最大になり得ないですから．こうして，自然数 n が限りなく大きくなっていく状況を

$$n \to \infty$$

という記号で書きます．自然数 n が無限大（∞）に向かう（$\to$）という気持ちですが，∞ という値があるわけではないので，決して到達できません」

空はさらに，向かう記号（$\to$）は自然数に対してだけでなく，一般の実数についても使われることを言い始めた．

「例えば，数列

$$0.1,\ 0.01,\ 0.001,\ \cdots,\ 0.\underbrace{00\cdots01}_{n},\ \cdots$$

は，どこに向かっていると思いますか」

「０です．小数点以下の０がどんどん増えていくので」と，素琉がすぐに答えた．

「分数で書くと，

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots,\ \frac{1}{10^n},\ \cdots$$

となります．そうか．だから，

$$\frac{1}{10^n} \to 0$$

と書くのですね」

菜怜は記号→の使い方を類推して書いた．

「いいですね！ 番号 n を限りなく大きくしていったとき，つまり $n \to \infty$ のとき，数列の一般項の向かう先を矢印（→）の右に書いたわけです．これを，

$$n \to \infty \text{ のとき } \frac{1}{10^n} \to 0$$

あるいは，簡単に

$$\frac{1}{10^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

あるいは，記号的に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$$

と書きます．最後の表現は限りない果て，つまり極限（limit）を記号化したものです」

「矢印は $n \to \infty$ の 1 つだけになるのですね」と素琉が聞いたら，よいポイントですね，と空が応じて，等号の役割から解説した．

「そもそも等号 = は左辺と右辺が等しいという意味です．例えば等式 $7+3=10$ を左から右に読む文章として捉えた場合，その文を

左辺は問いかけ（7+3 は ?）

右辺は答え（10 です）

のように読むことができます．だから，文章

$$\boxed{\frac{1}{10^n} \to}\, 0 \quad \boxed{(n \to \infty)}$$

の□で囲まれた部分を問いかけとして全部左辺にもっていってそれを記号化して，

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n}}$$

として，右辺を答え 0 とした文章が極限の数式といえます．そして，その心は，左辺を

$n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ が限りなく向かう先の値は？

という問いかけと思って，右辺で

それは 0 です

と答えるということです．数式問答ですね．左辺は，問いかけの文全体を記号化したものなので，$\lim\limits_{n\to\infty}$ だけ取りだしても，文章の一部を切り取ることになって意味をなしません」

空は 2 人の様子を見ながら一息ついて，さらに用語についての説明を始めた．

「いずれの表現を使うにしても，向かう先の値，いまの場合は 0 を数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ の極限値といいます．もう少し詳しくいうと，数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ の極限について考えよ，という問いかけに対して，

数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ は極限値 0 に収束する

といいます」

「では，左辺は数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ は極限値は何？ という問いかけになるのですね」

菜怜はすぐに用語を使いこなした．

「左辺は数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ はどんな値に収束する？ という問いかけでも良さそうです」

素琉もピタリと姉の思考に追従している．

「2 人とも用語をよく理解しています．ところで，ちゃぶ台をひっくりかえすようですが，数列 $\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$ の極限値は本当に 0 なのですか？ もしかしたらものすごく小さい正の数があって，それを例えば ε（イプシロン）として，極限値が ε かもしれないじゃないですか」

空は 2 人の直観を説明させるような質問をした．

「えーと，つまり，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = \varepsilon$$

かもしれないということですね」

菜怜はいま習ったばかりの記号を使って，質問を言い換えてみたものの答えに窮している．

ε ってめちゃめちゃ小さいけど 0 でない正の数だから，0.000… と 0 が続くのだけど，どこか

で0でない数字が出てくるのですよね……．素琉がぼそっといったら，菜怜は素琉の呟きを拾って，そうか，だからεは，こんな形なのですね，とノートに書いた．

$$0.00\cdots ■◎△※□\cdots$$

「まさしく！ その通りです．少し数学っぽく書くと

$$\varepsilon = 0.\underbrace{00\cdots0}_{m}■***\cdots$$

となるでしょうか．ここで，■には0以外の数字が入り，各$*$には0〜9のどんな数字が入ってもよく，それがずっと続くという意味です」

空は我が意を得たりとばかりに嬉しそうだ．

「だから，εがめちゃめちゃ小さいとmがめちゃめちゃ大きいということですね」

素琉の理解を受けて空は話を元に戻した．

「はい！ バッチリです．さて，先の菜怜さんの質問の言い換えと合わせると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n} = \varepsilon = 0.\underbrace{00\cdots0}_{m}■***\cdots$$

が正しいか，が論点となります」

左辺は$n\to\infty$のとき，

$$\frac{1}{10^n} = 0.\underbrace{00\cdots01}_{n}$$

の行き先は？ という問いかけだから……，と菜怜が論点を共有するように素琉に話しかけると，素琉がピンときた．

「$n=m+1$のとき，

$$\varepsilon = 0.00\cdots0■***\cdots$$
$$\frac{1}{10^n} = 0.00\cdots0\ 0\ 1$$

だから，$\varepsilon > \frac{1}{10^n}$です」

「やったね！ 素琉．$n=m+2$のとき$\frac{1}{10^n}$は$\frac{1}{10^{m+1}}$よりさらに小さいから，nがmより大きければ，$\varepsilon > \frac{1}{10^n}$が成り立ちます」

「2人ともお見事です．εがどんなに小さくてもそれが正の数である限り，つまりmがどんなに大きくてもそれが有限の値である限り，$n>m$ならば必ず$\varepsilon > \frac{1}{10^n}$が成り立つことがわかりました．そして，$n$をどんどん大きくしていって，ひとたび正の数$\varepsilon$を飛び越す（下回る）と，$\frac{1}{10^n}$は$\varepsilon$から遠ざかっていきます．だから，数列$\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$が正の数に収束することはないことがわかりました」

空はこういって今までの議論を整理して，数列$\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$が0に収束することの定義を述べた．

数列$\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$について以下のことがわかった．

どんな（に小さな）正の数

$$\varepsilon = 0.\underbrace{00\cdots0}_{m}■***\cdots$$

に対しても，$N=m+1$とおけば，

$n \geqq N$を満たすすべての自然数n

について，

$$\frac{1}{10^n} < \varepsilon$$

が成り立つ．

この事実を数列$\left\{\frac{1}{10^n}\right\}$が極限値0に収束することの定義とする．重要な点は，

$$n \geqq N \Rightarrow \frac{1}{10^n} < \varepsilon \tag{5}$$

の部分によって，収束の判定が出来ることである．

判定（5）は，Yes/Noで明快に答えられるが，$n\to\infty$のとき$\frac{1}{10^n}$は限りなく0に近づく，という表現は直観的だが主観に左右され不明瞭である．

「数学において直観は非常に重要な感覚です．一方，明快な定義は数学的事実の共有に不可欠です．さて，話をもとに戻して，素瑠くんの質問S_∞とは何か，についてはまだ答えていませんね．次回，続きを考えていきましょう」

空はこういって，今回の対話を終了した．

（やざき　しげとし／明治大学）