

21 17 段の不思議 (第 11 章)

インターネットで「17 段目の不思議」と検索すると、いくつかの記事が見つかります。高校数学の『数学活用 [38]』にも記載されているくらいだから有名な話題なのでしょう。著者は遅ればせながら 2, 3 年前に知って、実際に計算してみて「おおー」となりました。自分が「おおー」となるとすぐに人に試したくなって、小学生から大人まで会う人みなに出題し、みな「おおー」となってくれました。こうして自信を深めて (何の自信だ?), 読者のみなさんにも周知したくなり、本節を書いたわけです。しかし、単に知られている「17 段目の不思議」を書いて面白くないので (知っている読者もいるでしょうし), 18 段目以降の計算や、この計算の原理についても考えてみました。これが意外に面白い考察になりました。なんとあのフィボナッチやラグランジュにまで遡る深い話しに繋がっていたのです。

ともあれ、知っている人も知らない人も「17 段目の不思議」の計算をまずはやってみましょう。

◎——「17 段目の不思議」の計算

以下の手順で表の空欄に 1 桁の数を埋めていく。

手順 1 表 0.2 (a) や表 0.2 (b) のような 17 段の表を用意する。列数は任意でよいが、1 列だと得られる結果がよくわからないので、3 列、5 列、あるいは 10 列くらい用意しておくインパクトのある結果になる。

手順 2 2 段目にあらかじめ 1 桁の数を入れておく。例えば表 0.2 (a) では「5」を三つ書いた。5 以外の同じ数を並べてもよい。また、表 0.2 (b) のような数の並べ方でもよい。(これは意味のある並びなので、このまま鵜呑みに書くとよい。)

手順 3 1 段目の各マスに 1 桁の数を一つずつ書く。(表 0.2 (b) の場合は同じ数字でもかまわない。)

手順 4 縦の各列について、1 段目の数と 2 段目の数の和を 3 段目に書く。ただし、繰り上がった場合は、1 の位の数のみを 3 段目に書く。

表 0.2

1			
2	5	5	5
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			

(a)

1														
2	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7				
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														

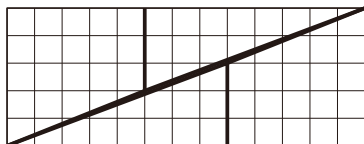
(b)

手順 5 以後同様に 17 段目まで、前の二つの段の数の和を書く。ただし、繰り上がった場合は、1 の位の数のみを書く。

さて結果は…。不思議？ びっくり？ 表 0.2 (a) と表 0.2 (b) のどちらにおいても、17 段目の数の並びは特徴的になったであろう。なぜか。(実際に計算した人のみ第 11 章に進む。)

22 面積が増えたり減ったり (第 11.8 節)

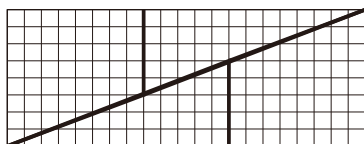
図 0.44 (1) のように、 8×8 のマス目が書かれた正方形に黒線を描き、(2) のように黒線に沿って切り取って並べ変える。あれれ!? 面積が増えた!



(2) マス目の数は $5 \times 13 = 65$ (個)

図 0.44 (1) $\rightarrow$ (2) の操作で面積が増えた！

図 0.45 (1) のように、 13×13 のマス目が書かれた正方形に黒線を描き、(2) のように黒線に沿って切り取って並べ変える。あれれ!? 面積が減った!



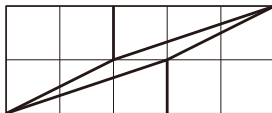
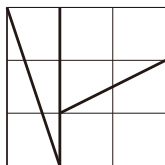
(2) マス目の数は $8 \times 21 = 168$ (個)

図 0.45 (1) $\rightarrow$ (2) の操作で面積が減った！

問 0.10 なぜでしょう？ 実際に図 0.44 や図 0.45 の (1) を工作用紙で作成し，黒線に沿って切り取り，各図の (2) のように並べ変えて確認してみよう．

答 0.10 もちろん、何かがおかしいわけであるが、工作用紙などで作ると、紙を切り取るときの誤差などから、種明かしのトリックがばやけてしまう。そこで、マス目の数が少ない場合を考えてみる。

図 0.46 のような 3×3 のマス目の場合、(2) は 1 マス分不足している。

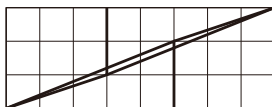
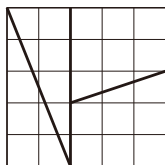


(1) マス目の数は $3 \times 3 = 9$ (個)

(2) マス目の数は $2 \times 5 = 10$ (個)

図 0.46 (1) → (2) の操作で明らかに 1 マス分の不足がみられる。

図 0.47 のような 5×5 のマス目の場合、(2) は 1 マス分重複している。



(1) マス目の数は $5 \times 5 = 25$ (個)

(2) マス目の数は $3 \times 8 = 24$ (個)

図 0.47 (1) → (2) の操作で明らかに 1 マス分の重複がみられる。

図 0.44 や図 0.45 は、マス目が小さいので、一見すると、各図の (1) → (2) の操作に問題はなさそうに思われる。しかし、図 0.44 (2) の直角三角形 (左下) と台形 (右下) の斜辺の傾きは、それぞれ $\frac{3}{8} = 0.375$ と $\frac{2}{5} = 0.4$ で、図 0.45 (2) のそれらは、それぞれ $\frac{5}{13} = 0.3846 \dots$ と $\frac{3}{8} = 0.375$ である。つまり、直角三角形と台形の斜辺の傾きが、ほとんど同じに見えるところが、視覚のトリック。図 0.45 よりもマス目の数を多くすると …, 続きは第 11.8 節。