
第 11 章

17 段目の不思議，そして裏にはフィボナッチ

11.1 「17 段の不思議」(第 0.21 節) の続き：からくり

からくりを考えよう。

表 11.1 (a) (次ページ) は，縦の列の計算過程である．1 段目の数を x ，2 段目の数を y とし，手順通りに 3 段目に $x + y$ を書く．(ただし，1 の位の数の表示ではなく，単純な和の羅列である．) 以下順次計算すると，17 段目には $610x + 987y$ の 1 の位の数が入る．

もう少し整理しよう．実際の計算において，例えば 8 段目の $13y$ は， $10y + 3y$ であり，1 の位だけをみるのだから少なくとも $10y$ は不要である．よって， $3y$ とすればよい．(もちろん， $3y$ も 1 桁の数かどうかはわからない．) このように考えて，表 11.1 (a) は (b) のように書き換えられる．そうして，17 段目を見ると， x の係数は 0 で， y の係数は 7 だから，1 段目にどのような数 x を与えたとしても，17 段目にはそれが反映されず，2 段目の数 y の 7 倍の 1 の位の数が入ることがわかる．

◎——表 0.2 (a) (43 ページ) のからくり

2 段目が $y = 5$ ならば，17 段目も 5 になる．

表 11.1

1	x	1	$1x + 0y$	1	1	0
2	y	2	$0x + 1y$	2	0	1
3	$x + y$	3	$1x + 1y$	3	1	1
4	$x + 2y$	4	$1x + 2y$	4	1	2
5	$2x + 3y$	5	$2x + 3y$	5	2	3
6	$3x + 5y$	6	$3x + 5y$	6	3	5
7	$5x + 8y$	7	$5x + 8y$	7	5	8
8	$8x + 13y$	8	$8x + 3y$	8	8	3
9	$13x + 21y$	9	$3x + 1y$	9	3	1
10	$21x + 34y$	10	$1x + 4y$	10	1	4
11	$34x + 55y$	11	$4x + 5y$	11	4	5
12	$55x + 89y$	12	$5x + 9y$	12	5	9
13	$89x + 144y$	13	$9x + 4y$	13	9	4
14	$144x + 233y$	14	$4x + 3y$	14	4	3
15	$233x + 377y$	15	$3x + 7y$	15	3	7
16	$377x + 610y$	16	$7x + 0y$	16	7	0
17	$610x + 987y$	17	$0x + 7y$	17	0	7

(a)

(b)

(c)

◎——表 0.2 (b) (43 ページ) のからくり

2 段目が $y = 0, 3, 6, 9, 2, 5$ ならば, 17 段目は $0, 1, 2, 3, 4, 5$ となる. (手順 2 で, 5 の後続けるならば $8, 1, 4, 7$ がよいといった理由もわかるであろう.)

11.2 18 段目以降はどうなるのか

表 11.1 (b) からわかるように, x と y の係数は独立に計算しているのだから, x と y の文字は不要で, 係数だけを計算すればよいことがわかる. (c) は (b) の係数だけを並べたものである.

ここまでからくりが明らかになると，18 段目以降の振る舞いが気になってくるが，何段まで足し算すればよいかの見通しもないまま，ひたすら足し算をする気にもならない．そこで表計算ソフトを使うことにする．表 11.1 (c) の続きを書けばよいので簡単である．

注意 11.1 表計算ソフトとして，マイクロソフト社のエクセル (Excel) は有名だが有償である．フリー (無償) のものとして，例えば，Google スプレッドシート (spread sheet) や OpenOffice カルク (Calc) などがある．

表 11.2 のように，セル A1, B1, A2, B2 にそれぞれ 1, 0, 0, 1 を入力する．

表 11.2

	A	B
1	1	0
2	0	1
3	A3	B3
4	A4	B4

セル A3 には，A1 と A2 の和の 1 の位，すなわち，A1 と A2 の和を 10 で割った余りを入れればよい．エクセルやスプレッドシートの場合，セル A3 には，

$$=MOD(A1+A2,10)$$

を入力する (カルクの場合「=MOD(A1+A2;10)」)．

同様に，

セル B3 には「=MOD(B1+B2,10)」を，

セル A4 には「=MOD(A2+A3,10)」を，

順次代入していく．

以降のセルには，フィルハンドルを使って同じ操作の繰り返しコピーができる．例えば，エクセルの場合，図 11.1 (次ページ) のようにする．

(c) よって、15 段後の 31-32 段目は、さらに 7 倍、すなわち 1-2 段目の 49 倍 (つまり 9 倍) となることがわかる。

(d) 次の 15 段後の 46-47 段目は、49 倍の 7 倍、すなわち 1-2 段目の 7^3 倍 (つまり 3 倍) となることがわかる。

(e) そして、次の 15 段後の 61-62 段目は、1-2 段目の 7^4 倍 (つまり 1 倍)、すなわち **1-2 段目と同じ数値が現れる**ことがわかる。

以上の現象は、どの段から始めても、(それを 1 段目と思えばよいのだから) 同じである。よって、 $(n)-(n+1)$ 段目の数の組と 60 段後の $(n+60)-(n+61)$ 段目の数の組とが必ず等しくなることがわかった。なぜ隣接する段の数の組が等しくなる組が現れたのか、また、それらの組の段数差が 60 であることはどのように特徴付けられるのか？

この疑問に立ち向かうために状況を整理しよう。

11.3 法 10 のフィボナッチ数列

状況を俯瞰するために、より一般的な見地から問題設定を考える。

◎——フィボナッチ数列

各列の数の並びは、1 段目と 2 段目の 1 桁の数を最初の 2 項として生成されるフィボナッチ数列の 1 の位を並べたものにほかならないことに注意する。ここでフィボナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、次の漸化式で定義される数列のことをいう。 a_1 と a_2 は初期値として与える。

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

本来、初期値を $a_1 = 0, a_2 = 1$ (あるいは $a_1 = a_2 = 1$) としたときの数列をフィボナッチ数列と呼ぶが、ここでは、任意の初期値 a_1 と a_2 に対して、上の漸化式から生成される数列もフィボナッチ数列と呼ぶことにする。

◎——合同式

1 の位を並べた列とは、言い換えると 10 で割った余りを並べた列のことである。そこで「余り」の計算に関する便利な記法を導入する。正の整数 m に対して整数 a, b の差 $a - b$ が m で割り切れるとき、 a と b は m を法 (modulus) として合同といい、

$$a \equiv b \pmod{m}$$

と表す。これは言い換えると、 a, b のそれぞれを m で割ったときの余りが等しいことにほかならない。例えば、

$$377 \equiv 7 \pmod{10}, \quad 8 \equiv 2 \pmod{3}$$

である。

◎——法 m のフィボナッチ数列

整数 $m > 1$ に対して整数を m で割った余りの集合を $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ と書くことにする。そして、任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$ と $n = 1, 2, \dots$ に対して、 m を法とするフィボナッチ数列を

$$a_n + a_{n+1} \equiv a_{n+2} \in \mathbb{Z}_m \pmod{m}$$

と定義する。つまり、 $a_n, a_{n+1} \in \mathbb{Z}_m$ が与えられたとき、 $a_n + a_{n+1}$ を m で割った余りを a_{n+2} とする。余りが 2 種類できることはないから、このように構成された数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は、最初の 2 項 $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_m$ を決めれば一意に定まる。この数列を簡単に「法 m のフィボナッチ数列」と呼ぶことにする。

例 11.1 $\mathbb{Z}_{10}$ において、 $a_1 = 5, a_2 = 7$ としたとき、

$$5 + 7 \equiv 2 \in \mathbb{Z}_{10} \pmod{10}$$

であるから、 $a_3 = 2$ である。

以後、 m を法として $a \equiv c$ かつ $b \equiv d$ であることを、まとめて

$$(a, b) \equiv (c, d) \pmod{m}$$

と表すことにする．法 m のフィボナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，最初の 2 項が $(a_1, a_2) \equiv (0, 0) \in \mathbb{Z}_m^2 = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ であるとその後は $a_n = 0$ が続くだけである．また，途中から $(a_n, a_{n+1}) \equiv (0, 0) \in \mathbb{Z}_m^2$ となることはない．実際，ある $n > 1$ においてはじめて $(a_n, a_{n+1}) \equiv (0, 0) \in \mathbb{Z}_m^2$ となったとする．このとき（はじめてだから） $a_{n-1} \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ である．よって， $a_{n+1} \equiv a_{n-1} + a_n = a_{n-1} \neq 0$ だから $a_{n+1} \equiv 0$ に矛盾する．

すべての項が 0 である，すなわち最初の 2 項が 0 であるフィボナッチ数列を自明なフィボナッチ数列と呼ぶことにする．

次のことはすぐにわかる．

命題 11.1 自明でない，法 m のフィボナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$(a_{1+k}, a_{2+k}) \equiv (a_1, a_2) \pmod{m}$$

を満たす初期値 (a_1, a_2) と m に依存して定まる正の整数 k が存在する．

証明 法 m のフィボナッチ数列の各項の値は $\mathbb{Z}_m$ の要素であるから，隣接する項の組 (a_n, a_{n+1}) は， (x, y) ($x, y \in \mathbb{Z}_m$) の形の合計 m^2 種類の中の一つである．よって， (a_1, a_2) から (a_{m^2}, a_{m^2+1}) までの m^2 個の組がすべて異なる数の組であったとしても，次の段の組 (a_{m^2+1}, a_{m^2+2}) は，それまでのもののいずれかと等しくならざるを得ない．鳩の巣の原理から， m^2 個から $m^2 + 1$ 個の異なるものを選ぶことはできないからである．ゆえに，次を満たす $l \in \{1, 2, \dots, m^2\}$ が存在する．

$$(a_l, a_{l+1}) \equiv (a_{m^2+1}, a_{m^2+2}) \pmod{m}$$

この l は初期値 (a_1, a_2) と m に依存して定まる．（このような l が複数ある場合は，その中で最大のものを改めて l とおく．）

これより，

$$a_{m^2+2} - a_{m^2+1} \equiv a_{l+1} - a_l \iff a_{m^2} \equiv a_{l-1} \pmod{m}$$

がわかる。同様に,

$$a_{m^2+1} - a_{m^2} \equiv a_l - a_{l-1} \iff a_{m^2-1} \equiv a_{l-2} \pmod{m}$$

もわかる。これを続けていって, $k = m^2 + 1 - l$ として,

$$(a_1, a_2) \equiv (a_{1+k}, a_{2+k}) \pmod{m}$$

を得る。この k も l と同様に初期値 (a_1, a_2) と m に依存して定まる。 $\square$

命題 11.1 の k を $k(a_1, a_2; m)$ と書くことにする。例えば $k(1, 0; 2) = k(0, 1; 2) = k(1, 1; 2) = 3$ はすぐにわかる。また表計算ソフトを使えば,

$$k(0, 5; 10) = 3, \quad k(2, 6; 10) = 4, \quad k(1, 3; 10) = 12$$

$$k(0, 2; 10) = 20, \quad k(1, 0; 10) = k(0, 1; 10) = k(1, 1; 10) = 60$$

など, 初期値に応じていろいろな k の値があり得ることもわかる。

初期値が $(b_1, b_2) = (1, 0)$ である法 m のフィボナッチ数列を $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ とし, 初期値が $(c_1, c_2) = (0, 1)$ である法 m のフィボナッチ数列を $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする。このとき $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ は一つ項がずれただけの数列 $b_{n+1} = c_n$ である ($n = 1, 2, \dots$)。したがって $k(1, 0; m) = k(0, 1; m)$ を得る。 $k_* = k(1, 0; m) = k(0, 1; m)$ とおく。

一般に, 初期値が $(a_1, a_2) = (p, q) \in \mathbb{Z}_m^2$ である自明でない法 m のフィボナッチ数列を $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とする。このとき, 法 m について

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a_1 = p = p \cdot 1 + q \cdot 0 = pb_1 + qc_1 \\ a_2 = q = p \cdot 0 + q \cdot 1 = pb_2 + qc_2 \end{cases} \\ & \implies a_3 \equiv a_1 + a_2 = p(b_1 + b_2) + q(c_1 + c_2) \equiv pb_3 + qc_3 \\ & \implies a_4 \equiv a_2 + a_3 = p(b_2 + b_3) + q(c_2 + c_3) \equiv pb_4 + qc_4 \end{aligned}$$

となるので, これを続けると一般に $a_n \equiv pb_n + qc_n$ を得る。よって,

$$a_{1+k_*} \equiv pb_{1+k_*} + qc_{1+k_*} \equiv pb_1 + qc_1 = a_1 \pmod{m}$$

となるので, $k(p, q; m) \leq k_*$ を得る。また, $k(p, q; m)$ は k_* の約数である。

実際, $l = k(p, q; m)$ として,

$$a_1 \equiv a_{1+l} \equiv a_{1+2l} \equiv \cdots \equiv a_{1+ml} \equiv \cdots \pmod{m}$$

と続けていくと, $a_{1+k_*} \equiv a_1$ だから, いつか $k_* = ml$ となる整数 m が現れる.

以上の考察から, あらゆる $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_m^2$ に対する各 $k(a_1, a_2; m)$ の値の最小公倍数が k_* であることがわかった. これより, 法 m のフィボナッチ数列は周期的であるといい, k_* を (基本) 周期と呼ぶ. この周期はピサノ (Pisano) 周期と呼ばれ [63], しばしば $k_* = \pi(m)$ と書かれる. (π は周期 (period) か Pisano の頭文字 p か不明. いずれにせよ, $p(m)$ と書かない理由は, m として素数 (prime) p の場合を考えたいからであろう.)

以上の記法と用語を使えば, 「17 段目の不思議」の各列の計算は,

1-2 段目の $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_{10}$ を初期値とする法 10 のフィボナッチ数列の展開

といえる. そして周期は

$$\pi(10) = 60$$

である. この事実は, ラグランジュ¹⁾ が 1774 年に発見しており [30, p.105], さらに, ラグランジュは命題 11.1 を示していた [7, Chapter XVII].

しかし, これだけでは 60 という数値の特徴付けは不明である. 次節でなぜ $\pi(10) = 60$ となったのかのからくりを明らかにしよう.

11.4 周期 $\pi(10) = 60$ の特徴付け

まず, 少し一般に, 法 m とピサノ周期 $\pi(m)$ の関係を見るためにいくつかの m についてコンピュータで計算した. プログラムは素朴なもので,

$a_1 = 0, a_2 = 1$ からスタートし, $n = 1, 2, \dots$ に対して法 m のフィボナッチ数列を順次計算し, $n > 1$ ではじめて $(a_n, a_{n+1}) = (a_1, a_2)$ となったとき, 周期を $\pi(m) = n - 1$ とする

¹⁾ Joseph-Louis Lagrange, 1736–1813.

というものである。こうして得られた周期表が表 11.4 である。

表 11.4

m	π	11	10		41	40		91	112		291	392
2	3	12	24		42	48		92	48		292	444
3	8	13	28		43	88		93	120		293	588
4	6	14	48		44	30		94	96		294	336
5	20	15	40	...	45	120	...	95	180	...	295	580
6	24	16	24		46	48		96	48		296	228
7	16	17	36		47	32		97	196		297	360
8	12	18	24		48	24		98	336		298	444
9	24	19	18		49	112		99	120		299	336
10	60	20	60		50	300		100	300		300	600

◎——法 2 のとき $\pi(2) = 3$ である

例えば、法 2 のとき $\pi(2) = 3$ であるが、このことは手計算ですぐにわかる (表 11.5)。

表 11.5 法 2 のフィボナッチ数列

n	1	2	3	4	5	...
a_n	0	1	1	0	1	...

◎——法 5 のとき $\pi(5) = 20$ である

次に、法 5 のとき $\pi(5) = 20$ であるが、このことは a_{21} , a_{22} まで計算しなくても、途中でわかる。

表 11.6 法 5 のフィボナッチ数列

n	1	2	3	4	5	6	7	...
a_n	0	1	1	2	3	0	3	...

実際, 表 11.6 の状況から,

$$a_{n+5} \equiv 3a_n, \quad a_{n+6} \equiv 3a_{n+1} \pmod{5}$$

がわかる. 以後, m を法として $a \equiv kc$ かつ $b \equiv kd$ が成り立つことを, まとめて

$$(a, b) \equiv k(c, d) \pmod{m}$$

と表すことにすると,

$$(a_{n+5}, a_{n+6}) \equiv 3(a_n, a_{n+1}) \pmod{5}$$

が成り立つことがわかる. つまり, 5 段進むと 3 倍になるということである. さらに 5 段進むと,

$$(a_{n+10}, a_{n+11}) \equiv 3(a_{n+5}, a_{n+6}) \equiv 9(a_n, a_{n+1}) \equiv 4(a_n, a_{n+1}) \pmod{5}$$

から 4 倍になる. さらに 5 段進むと,

$$(a_{n+15}, a_{n+16}) \equiv 4(a_{n+5}, a_{n+6}) \equiv 12(a_n, a_{n+1}) \equiv 2(a_n, a_{n+1}) \pmod{5}$$

から 2 倍になる. そして, さらに 5 段進むと,

$$(a_{n+20}, a_{n+21}) \equiv 2(a_{n+5}, a_{n+6}) \equiv 6(a_n, a_{n+1}) \equiv (a_n, a_{n+1}) \pmod{5}$$

となってもとに戻る. こうして $\pi(5) = 20$ がわかる.

◎——そして, 法 10 のとき $\pi(10) = 60$ である

なぜ, 天下り的に $\pi(2) = 3$ と $\pi(5) = 20$ を計算したのか. それは次の命題を使って $\pi(10) = \pi(2 \cdot 5)$ を特徴付けることができるからである.

命題 11.2 以下の同値性が成り立つ.

$$\begin{cases} \alpha \equiv \beta \pmod{2} \\ \alpha \equiv \beta \pmod{5} \end{cases} \iff \alpha \equiv \beta \pmod{10}$$

この命題は、 $\alpha - \beta$ が 2 の倍数かつ 5 の倍数であることと、10 の倍数であることが同値であることを言っているにすぎない。ほぼ自明にも思える、この同値性の丁寧な (若干しつこい?) 証明は後述するとして、以下、命題 11.2 を使って $\pi(10) = 60$ を示そう。

前 2 小節で $\pi(2) = 3$ と $\pi(5) = 20$ であることをみた。この事実を適用すると、 $\pi(2) = 3$ から

$$(a_n, a_{n+1}) \equiv (a_{n+3}, a_{n+4}) \equiv \cdots \equiv (a_{n+60}, a_{n+61}) \equiv \cdots \pmod{2}$$

がわかり、 $\pi(5) = 20$ から、

$$(a_n, a_{n+1}) \equiv (a_{n+20}, a_{n+21}) \equiv \cdots \equiv (a_{n+60}, a_{n+61}) \equiv \cdots \pmod{5}$$

がわかる。

よって、命題 11.2 から、

$$(a_{n+60}, a_{n+61}) \equiv (a_n, a_{n+1}) \pmod{10}$$

を得る。これより、 $\pi(10) = \pi(2 \cdot 5) = 60$ は $\pi(2) = 3$ と $\pi(5) = 20$ の最小公倍数として特徴付けられることがわかった。

◎——命題 11.2 の証明

m が n を割り切る、すなわち、 $n = km$ という整数 k があるとする。整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書くことにすると、

k が整数であるとは、 $k \in \mathbb{Z}$ というこ

になる。したがって、 m が n を割り切るとは、

$n = km$ を満たす $k \in \mathbb{Z}$ がある

($n = km$ が成り立つようなある $k \in \mathbb{Z}$ が存在する)

ことと言い換えられる。これを数学的に英語で表現すると、

There exists a $k \in \mathbb{Z}$ such that $n = km$ holds.

となる。ここで、ある (exist) の頭文字 e の大文字 E の鏡文字をつかって、ヨという記号で「ある (存在する) こと」を表すことにして、上の英文をその

まま次のような論理式で表現する.

$$\exists k \in \mathbb{Z} (n = km) \quad (11.1)$$

以後これに類似した論理式の使い方をすることにしよう.

m が n を割り切る, すなわち (11.1) が成り立つとき, 以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \alpha \equiv \beta \pmod{n} &\iff \exists s \in \mathbb{Z} (\alpha - \beta = sn) \\ &\iff \exists s \in \mathbb{Z} (\alpha - \beta = skm) \\ &\implies \alpha \equiv \beta \pmod{m} \end{aligned} \quad (11.2)$$

命題 11.2 の証明 $\Leftarrow$) $10 = 2 \cdot 5$ だから, (11.2) より,

$$\alpha \equiv \beta \pmod{10} \implies \begin{cases} \alpha \equiv \beta \pmod{2} \\ \alpha \equiv \beta \pmod{5} \end{cases}$$

がわかる.

$\implies$) まず,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha \equiv \beta \pmod{2} \\ \alpha \equiv \beta \pmod{5} \end{cases} &\iff \begin{cases} \exists s \in \mathbb{Z} (\alpha - \beta = 2s) \\ \exists t \in \mathbb{Z} (\alpha - \beta = 5t) \end{cases} \\ &\implies \exists k \in \mathbb{Z} ((\alpha - \beta)^2 = 10k) \\ &\iff (\alpha - \beta)^2 \equiv 0 \pmod{10} \end{aligned}$$

である. ここで, $n = 1, 2, \dots, 9$ に対して n^2 の 1 の位が 0 になるものはない. よって,

$$n^2 \equiv 0 \pmod{10} \implies n \equiv 0 \pmod{10}$$

がわかる. この逆も成り立つことは明らかだから,

$$n^2 \equiv 0 \pmod{10} \iff n \equiv 0 \pmod{10}$$

を得る. ゆえに,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \alpha \equiv \beta \pmod{2} \\ \alpha \equiv \beta \pmod{5} \end{cases} &\implies \exists k \in \mathbb{Z} ((\alpha - \beta)^2 = 10k) \\
&\iff (\alpha - \beta)^2 \equiv 0 \pmod{10} \\
&\iff \alpha - \beta \equiv 0 \pmod{10} \\
&\iff \alpha \equiv \beta \pmod{10}
\end{aligned}$$

以上より命題 11.2 が証明された。 □

11.5 ピサノ周期 $\pi(m)$ の特徴付け

より一般に知られている事実をまとめてみよう。

表 11.4 から、いくつかのことが (期待をこめて) 予想される。例えば、 $m > 2$ のときの周期は偶数、同じ周期になる異なる m が存在、 m が 10 の倍数のときの周期は 60 の倍数、 $\pi(m) = m$ となる m が存在 ($m = 24$)、など。

ピサノ周期 $\pi(m)$ に関する既知の結果は数多い。次の命題は、その中から抜粋してまとめたものである。

命題 11.3 以下のことが成り立つ。

- (1) $m > 2$ ならば、 $\pi(m)$ は偶数である [60].
- (2) $\pi(m) = m$ となるための必要十分条件は、ある正の整数 λ に対して $m = 24 \cdot 5^{\lambda-1}$ であること [12].
- (3) 各 $m > 1$ に対して、正の整数 ω と λ が決まって、 $\pi^\omega(m) = 24 \cdot 5^{\lambda-1}$ となる [12].
- (4) すべての $m > 1$ に対して $\pi(m) \leq 6m$ が成立。等号成立は正の整数 r に対して $m = 2 \cdot 5^r$ であること [9].

ここで (3) の $\pi^\omega(m)$ は ω 回の関数 $\pi(m)$ の合成、すなわち、 $\pi^2(m) = \pi(\pi(m))$ 、 $\pi^\omega(m) = \pi(\pi^{\omega-1}(m))$ ($\omega > 1$) である。

注意 11.2 前節ですでに証明したが， $\pi(10) = 60$ の特徴付けは命題 11.3 (4) の主張に含まれる．

注意 11.3 命題 11.3 (3) から ω と λ は m に依存することがわかる．それぞれ $\omega = \omega(m)$ と $\lambda = \lambda(m)$ と書いてフィボナッチ振動数，レオナルド対数と呼ぶ [17]．ピサノ周期も含めて，これらはフィボナッチの名にちなんだものである．フィボナッチは，1170 年頃–1250 年頃に活躍した数学者で，イタリアのピサ (Pisa)——あの斜塔で有名な町——において生没した．本名は Leonardo Pisano (ピサのレオナルド)．フィボナッチ²⁾ は通称である．

$m = 2, 3, \dots, 15600$ に対して，ピサノ周期 $\pi(m)$ ，フィボナッチ振動数 $\omega(m)$ ，レオナルド対数 $\lambda(m)$ の各値をコンピュータで計算してみた．例えば， $m = 15600$ のとき， $\pi(m) = 4200$ ， $\omega(m) = 3$ ， $\lambda(m) = 3$ で，実際， $\pi(4200) = 1200$ ， $\pi(1200) = 600 = 24 \cdot 5^{3-1}$ だから主張 (3) の通りである．

論文 [17, p.3] では， $m = 2, 3, \dots, 15600$ までの各値の数値表を 50 ページも使って報告しており，その計算に (1968 年当時，最先端コンピュータであったであろう) IBM360/75 で 1 時間かかったと書いてある．一方，手持ちのノートパソコン (MacBook Pro) で著者が同じ計算をしてみると 50 秒程度であった．効率を考えずに作った即席プログラムなのに 60 倍以上の速さ！ パソコンの進歩の凄まじさを実感しました．

◎——さらなる拡張： d 桁フィボナッチ数列

法 10 のフィボナッチ数列はいわば 1 桁フィボナッチ数列といえるが，もっと拡張させて，2 桁フィボナッチ数列 (法 100 のフィボナッチ数列)，3 桁フィボナッチ数列 (法 1000 のフィボナッチ数列)，あるいは d 桁フィボナッチ数列 (法 10^d のフィボナッチ数列) など考えられる．

思いつくことは大抵誰かがやっているもので，これらの拡張フィボナッチ数

²⁾ Fibonacci, Bonacci 家の息子，あるいは son of good nature [30, 第 5 章]．

列の周期についてもすでに調べられていた。まず、表 11.4 から $\pi(100) = 300$ である。さらに、 $\pi(1000) = 1500$, $\pi(10000) = 15000$ と続く。いかにも規則性がありそうだが、その後も想像通りに $\pi(10^d) = 15 \cdot 10^{d-1}$ ($d \geq 3$) となることが知られている。この結果やその他の結果については、Livio [30], Wolfram MathWorld [63], Dickson [7, Chapter XVII], あるいは、Wikipedia の「Pisano period」の項などが参考になるだろう。

注意 11.4 (ただし！) ウィキペディアの解説記事は、それをそのまま鵜呑みにせず、引用論文や記事などを必ず見て、その記事もどこかの論文の孫引きになっていないかをチェックする必要がある。慎重にすべき理由は、秒単位で修正可能なことや裏取りをしていない安易な引用や孫引きが多いことなどによる。「誤情報を拡散させない」ためにも、このような作業は大切である。その意味で、Dickson [7, Chapter XVII] のように、オリジナルの論文の該当ページまで指摘している文献は価値がある。

11.6 一般化遊び

表計算ソフトで遊んでいると、次のような一般化をしたくなる。

集合 $\mathbb{Z}_{10}$ から 0 を除いた集合を $\mathbb{Z}'_{10} = \{1, 2, \dots, 9\}$ とする。

探究 11.1 任意の $p, q \in \mathbb{Z}'_{10}$ と任意の $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_{10}$ に対して、漸化式

$$pa_n + qa_{n+1} \equiv a_{n+2} \pmod{10; n = 1, 2, \dots}$$

によって定まる法 10 のフィボナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の周期性について考察せよ。(p, q の値によって、周期的であったりなかったりする。)

探究 11.1 で p, q の値をいろいろといじっていると、そもそも途中で、偶数倍や 5 倍になると周期性がでてこないことに気がつく。つまり、途中で 3, 7, 9 倍が出てくれば周期的となることが確定する。しかし、このことは数列

が周期的になるための必要条件ではなさそうである。これは次の遊びで気がついた。

11.7 127 段目の驚き

さらに遊んでいると、1 桁フィボナッチ数列の「17 段目の不思議」(60 周期) を拡張したくなる。例えば、1 桁トリボナッチ数列の「127 段目の不思議」(124 周期)、1 桁テトラナッチ数列の「394 段目の不思議」(1560 周期) など面白い現象も次々とみつかると。さらにそれぞれの法の値を一般化するときと知られていない新発見が出てくるはずだ。

探究 11.2 任意の $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}_{10}$ に対して、

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \equiv a_{n+3} \in \mathbb{Z}_{10} \pmod{10; n = 1, 2, \dots}$$

によって定まる法 10 のトリボナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 124 周期であること、すなわち、

$$(a_{n+124}, a_{n+125}, a_{n+126}) \equiv (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) \pmod{10}$$

となることが **127 段目**まで続けてわかった。(しかし、途中で三つの組が 3, 7, 9 倍になることはなかった。) この周期にからくりはあるのだろうか。

調子に乗ってきた。表計算ソフトを使えば計算させることは簡単である。

探究 11.3 任意の $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_{10}$ に対して、

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} \equiv a_{n+4} \in \mathbb{Z}_{10} \pmod{10; n = 1, 2, \dots}$$

によって定まる法 10 のテトラナッチ数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の周期はいくつであろうか。

表計算ソフトを使って、初期値の四つの組から 390 段進んで、**394 段目**まで続けると

$$(a_{n+390}, a_{n+391}, a_{n+392}, a_{n+393}) \\ \equiv 3(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}) \pmod{10}$$

のように 3 倍になることがわかる。これより、

$$390 \times 2 = 780 \text{ 段後に } 3^2 \equiv 9 \text{ 倍} \pmod{10}$$

$$390 \times 3 = 1170 \text{ 段後に } 3^3 \equiv 7 \text{ 倍} \pmod{10}$$

$$390 \times 4 = 1560 \text{ 段後に } 3^4 \equiv 1 \text{ 倍} \pmod{10}$$

がわかるから、テトラナッチ数列は 1560 周期である。この周期、あるいは 390 段で 3 倍となる理由はなんだろうか。

もう次で最後でよいでしょう。

探究 11.4 フィボナッチ、トリボナッチ、テトラナッチ、ペンタナッチ、ヘキサナッチ、…。このように逐次名前がつく法 10 の数列は必ず周期的になるのだろうか。また周期に特徴はあるのだろうか。

11.8 「面積が増えたり減ったり」(第 0.22 節) の続き

第 0.22 節 (44 ページ) の面積の増減トリックを整理してみよう。

$$\begin{array}{ll} \text{図 0.46} & 3 \times 3 = 9 \quad \xrightarrow{+1} \quad 2 \times 5 = 10 \\ \text{図 0.47} & 5 \times 5 = 25 \quad \xrightarrow{-1} \quad 3 \times 8 = 24 \\ \text{図 0.44} & 8 \times 8 = 64 \quad \xrightarrow{+1} \quad 5 \times 13 = 65 \\ \text{図 0.45} & 13 \times 13 = 169 \quad \xrightarrow{-1} \quad 8 \times 21 = 168 \end{array}$$

登場する数字だけ小さい順にとりあげると、

$$2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

となるが, この数字の並びはまさに, 本章でこれまで扱ってきた $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ から始まる漸化式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ を満たすフィボナッチ数列にほかならない. これより, 次の規則性が成り立つことが予想される.

$$a_{n+1} \times a_{n+1} + 1 = a_n \times a_{n+2} \quad (n = 2, 4, 6, \dots)$$

$$a_{n+1} \times a_{n+1} - 1 = a_n \times a_{n+2} \quad (n = 3, 5, 7, \dots)$$

$n = 1$ のとき,

$$2 \times 2 = 4 \xrightarrow{-1} 1 \times 3 = 3$$

も成り立つので, 上の予想を示すには, 初項 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ から始まるフィボナッチ数列に対して, 次の等式が証明できればよい.

$$a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 = (-1)^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (11.3)$$

数学的帰納法で証明してみよう. まず, $n = 1$ のときは上で見たとおりに成立している. $n = k - 1$ のとき

$$a_{k-1} a_{k+1} - a_k^2 = (-1)^{k-1} \quad (11.4)$$

が成立するとする. $n = k$ のとき

$$\begin{aligned} a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2 &= a_k (a_k + a_{k+1}) - a_{k+1}^2 \\ &= a_k^2 + a_k a_{k+1} - a_{k+1}^2 \\ &= a_{k-1} a_{k+1} - (-1)^{k-1} + a_k a_{k+1} - a_{k+1}^2 \quad ((11.4) \text{ より}) \\ &= (a_{k-1} + a_k) a_{k+1} + (-1)^k - a_{k+1}^2 \\ &= a_{k+1}^2 + (-1)^k - a_{k+1}^2 = (-1)^k \end{aligned}$$

となるので, 等式 (11.3) が示された.

等式 (11.3) の両辺の絶対値ととると,

$$|a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2| = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

であるから, この面積増減のトリックは, 肉眼で観察するのが難しくなるだけで, 永遠に面積差は 1 のままであることがわかる.

ところで, $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと, 数列 $\{r_n\}$ は表 11.7 となって, 増えたり減ったりを繰り返すことが予想される.

表 11.7

n	1	2	3	4
r_n	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{3}{2} = 1.5$	$\frac{5}{3} = 1.666\cdots$	$\frac{8}{5} = 1.6$
n	5	6	7	$\cdots$
r_n	$\frac{13}{8} = 1.625$	$\frac{21}{13} = 1.615\cdots$	$\frac{34}{21} = 1.619\cdots$	$\cdots$

実際, 等式 (11.3) の両辺を $a_n a_{n+2}$ で割ると,

$$1 - \frac{r_n}{r_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+2}} \quad (11.5)$$

であり, 右辺は正負を交互にとるので, この予想は正しいことがわかる.

◎——有界性

表 11.7 をよく見ると, $1.6\cdots$ 付近をふらふらしているようにも見える. そこでもう少し大雑把に $n = 3, 4, \cdots$ に対して, $1.5 < r_n < 2$ が成り立つことを予想してみる. $n = 3$ のとき, $r_3 = \frac{5}{3} \in (1.5, 2)$ である. また, 漸化式 $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ の両辺を a_{n+1} で割ると,

$$r_{n+1} = \frac{1}{r_n} + 1 \quad (11.6)$$

であるから,

$$\begin{aligned} r_n > 1.5 &\implies r_{n+1} < \frac{1}{1.5} + 1 < 2 \\ r_n < 2 &\implies r_{n+1} > \frac{1}{2} + 1 = 1.5 \end{aligned}$$

となって, すべての $n = 3, 4, \cdots$ に対して $1.5 < r_n < 2$ が成り立つことがわかる (数学的帰納法).

◎——単調性

表 11.7 を別の視点からみると,

$$r_1 > r_3 > r_5, \quad r_2 < r_4 < r_6$$

であるから, $\{r_n\}$ の奇数番号列は単調に減少し, 偶数番号列は単調に増加するのではないかと期待できる. 実はこの予想はつねに正しいことを (11.6) から確かめてみよう.

$$r_{2m-1} > r_{2m+1}, \quad r_{2m} < r_{2m+2}$$

は, $m = 1, 2$ のとき成り立つ. $m = k$ のとき成り立つとすると, $m = k + 1$ のとき,

$$\begin{aligned} r_{2k+1} - r_{2k+3} &= \frac{1}{r_{2k}} - \frac{1}{r_{2k+2}} = \frac{r_{2k+2} - r_{2k}}{r_{2k}r_{2k+2}} > 0 \\ r_{2k+4} - r_{2k+2} &= \frac{1}{r_{2k+3}} - \frac{1}{r_{2k+1}} = \frac{r_{2k+1} - r_{2k+3}}{r_{2k+3}r_{2k+1}} > 0 \end{aligned}$$

となってやはり成り立つ.

◎——収束性

これより, 奇数番号列の単調減少性, 偶数番号列の単調増加性, 有界性 ($1.5 < r_n < 2$) をまとめると,

$$\begin{cases} r_3 > r_5 > \cdots > r_{2m-1} > r_{2m+1} > \cdots > 1.5 \\ r_4 < r_6 < \cdots < r_{2m} < r_{2m+2} < \cdots < 2 \end{cases}$$

がわかる.

単調減少数列が下に有界, あるいは単調増加数列が上に有界のとき, それぞれの数列は収束することが知られている. この事実を使うと,

$$r_{2m+1} \rightarrow \alpha, \quad r_{2m} \rightarrow \beta \quad (m \rightarrow \infty)$$

のような極限值 α, β の存在が保証される.

また, (11.5) において, $n = 2m - 1$ (奇数) とすると,

$$1 - \frac{r_{2m-1}}{r_{2m}} < 0 \iff r_{2m} < r_{2m-1}$$

である.

以上より, 極限值は $1.5 \leq \beta \leq \alpha \leq 2$ という関係にあることがわかるが, 実は $\alpha = \beta$ である. 実際, (11.6) において, n を偶数としたときと, 奇数にしたときのそれぞれの極限を考えると,

$$\alpha = \frac{1}{\beta} + 1, \quad \beta = \frac{1}{\alpha} + 1$$

を同時に満たすことがわかる. これより, $\alpha = \beta$ がわかる. つまり, 数列 $\{r_n\}$ は, 奇数番号列でも偶数番号列でも同じ値 ——それを ϕ とおこう——に収束するので, 結局, 数列 $\{r_n\}$ はある ϕ という値に収束することがわかる.

◎——黄金比！

(11.6) において, $n \rightarrow \infty$ とすると,

$$\phi = \frac{1}{\phi} + 1$$

となる. この ϕ についての 2 次方程式を解くと, $\phi > 0$ から

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.6180339887 \dots$$

となることがわかる. $1 : \phi$ を黄金比と呼ぶ.

そもそもの問題から ϕ に至るまでを整理しよう.

$a_{n+1} \times a_{n+1}$ の正方形と $a_n \times (a_n + a_{n+1})$ の長方形の面積比較

↓

↓ 全体を a_n で割る

↓

$r_n \times r_n$ の正方形と $1 \times (1 + r_n)$ の長方形の面積比較

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \quad n \rightarrow \infty \\ \downarrow \end{array}$$

$\phi \times \phi$ の正方形と $1 \times (1 + \phi)$ の長方形の面積比較

r_n は有理数なので正方形の面積 r_n^2 と長方形の面積 $1 + r_n$ は永遠に一致しないが， $n \rightarrow \infty$ の極限において，すなわち永遠の彼方で，正方形の面積 ϕ^2 と長方形の面積 $1 + \phi$ は一致する！

◎——ルイス・キャロルのフィボナッチパズル!?

第 0.22 節の面積の増減トリックは，インターネットで検索するとしばしば「ルイス・キャロルのフィボナッチパズル」と呼ばれているようである．本当にあの『不思議の国のアリス』の作者のルイス・キャロルが「フィボナッチ数列」を背景にして作ったパズルなのか．不明だったので少し調べたことをここに報告する．

1925 年出版の Ball の本 [4, *Third Paradox* (pp.52–54)] に面積増減トリックの一番わかりやすい 8×8 の正方形と 5×13 の長方形の例 (本書の図 0.44 (44 ページ)) が記載されている．さらに， $13 \times 34 - 21^2 = 1$ などの他の数値例は ϕ の連分数表示に収束する数列から得られると解説している．このことから当然フィボナッチ数列のことは知っていたと推測されるが，ルイス・キャロルについての言及はない．また，同書 53 ページの脚注に，『著者は誰がこのパラドックスを発見したのかを知らない．さまざまな最近の本で取り上げられているが，[44] より古い記事は見つけられていない。』と明記している．その記事 [44] とは「幾何パラドックス」と題された図 11.2 の短い記事である．

これは 1868 年発行のドイツの雑誌『数学と物理 (Zeitschrift für Mathematik und Physik)』の第 13 巻，162 ページに記載されていた記事 [44] で，図 11.2 の右下の署名 Schl. は，恐らくこの巻の編著者 Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl, Dr. M. Cantor の三人の一人，Schlömilch³⁾ のことだと思われる

³⁾ ドイツの数学者．Oscar Xaver Schlömilch, 1823-1901. 日本ではしばしば「Roche-

IX. Ein geometrisches Paradoxon. Um ad oculos zu demonstrieren, dass das Schachbrett nicht nur 64, sondern auch 65 Felder besitzt, schneide man dasselbe aus starkem Papier, zerlege es auf die in Fig. 1

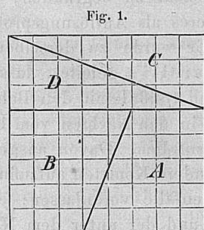
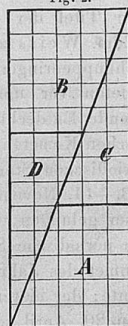


Fig. 2.



angegebene Weise in vier, zu je zweien congruente Stücke A, B, C, D und setze diese zu einem Rechtecke zusammen, welches, wie Fig. 2 zeigt, die Grundlinie 5 und die Höhe 13 besitzt also 65 Felder enthält. — Wir theilen diese kleine Neckerei mit, weil die Aufsuchung des begangenen Fehlers eine hübsche Schüleraufgabe bildet und weil sich an die Vermeidung des Fehlers die Lösung und Construction einer quadratischen Gleichung knüpfen lässt. Schl.

図 11.2 [44] より引用.

る。ところが、2014 年の Singmaster の記事 [47, p.15] には、『1938 年の Weaver の記事 [61] に図 11.2 の記事は Otto Schlömilch であったと書いてあり、その雑誌の共編者であったから恐らくそれは正しい』と書いてある。(Singmaster の記事 [47, p.15] の Weaver の文献番号 [12] は [20] の間違いのはず。) セント・アンドリュース大学の数学史のウェブサイト [51] によれば、Oscar Xaver Schlömilch が、雑誌『数学と物理 (Zeitschrift für Mathematik und Physik)』を 1856 年に創刊した人物である。(創刊後しばらくは「Schlömilch の雑誌 (Zeitschrift)」と呼ばれていたようである。) また、1859 年にあの M. Cantor⁴⁾ が、翌年には E. Kahl が雑誌編集に参画し、

Schlömilch の剰余項」と呼ばれるテイラー展開の剰余項の一つの形に名前が残っている [40]. また、Roche はフランスの天文学者 Édouard Albert Roche, 1820–1883 [40, 49].

⁴⁾ ドイツの数学者。Moritz Benedikt Cantor, 1829–1920. カントール集合の名前は有名。

1896 年に Schlömilch が引退するまで 3 人の編集体制だったとある．となると，Otto Schlömilch はどなた？ ということになる．少なくともセント・アンドリュース大学のウェブサイト [51] に該当者はいなかった⁵⁾．

そこで，Weaver の記事『ルイス・キャロルと幾何パラドックス [61]』を当たってみた．「In a familiar geometrical paradox*…」という書き出しで， 8×8 の正方形と 5×13 の長方形の例が挙げられている．[*] で指示している脚注 (234 ページ) には、『このパラドックスは W. W. R. Ball の「第 5 版 Mathematical Recreations and Essays」(1911) の 53 ページに記載されている』とある⁶⁾．続けて『Schlömilch によって 1868 年に発表されたものが最初のようなのだ』との記述があり，記事 [44] を見よ，と締めくくっている．この記事を読む限り，Schl. は Schlömilch であると断言 (思い込み?) している．しかし，Otto Schlömilch とはいっていない．Singmaster [47, p.15] で指摘している Otto Schlömilch が誰なのかは依然不明のままである．

Weaver の記事 [61] はタイトルに Lewis Carroll が含まれている通り，ドジソン (ルイス・キャロル⁷⁾) がこの幾何パラドックスに対しておこなった数学について言及している．ただし，ドジソンの未発表の不完全で不明瞭なノートを著者なりに補完している．したがって，あくまで若干の推測の域はあるものの，その限りにおいては，ドジソンは幾何パラドックスになり得る正方形と長方形の各辺の長さがフィボナッチ数列に対応していると主張して

⁵⁾ 紛らわしいドイツ風の名前の数学者に Otto Yulyevich Schmidt (1891[現・ベラルーシ]–1956[露]) がいるが，生没年から考えて別人のはずだ．ちなみにこのシュミット (Schmidt) はグラム-シュミットの直交化法のシュミットではない．こちらのシュミットは Erhard Schmidt (1876[現・エストニア]–1959[独])．

⁶⁾ 参考文献の Ball [4] は第 10 版 (Reprinted) で，上で述べたように 53 ページにも同じ記述がある．第 5 版は入手できなかったが，入手できた第 4 版 [3, pp.42–43] には上述した *Third Paradox* の段落があったので，第 5 版にもこのパラドックスが記載されていたことはまず間違いない．この第 4 版はインターネットから入手可能な Project Gutenberg の EBook # 26839 版 (2008.10.8) によるものなので，ページが 10 ページほどずれている．

⁷⁾ イングランドの数学者．Lewis Carroll はペンネーム．本名は Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898)．1865 年の『不思議の国のアリス (Alice's Adventures in Wonderland)』，1871 年の『鏡の国のアリス (Through the Looking-Glass, and What Alice Found There)』はあまりにも有名．

いるようである。

インターネット検索だけでここまでの情報が得られたのだから，本小節はここでおしまいにしましょう．より深くて正確な情報は読者に委ねることにして．