懸賞問題 A

問題 1 (難易度 $\star$). テニスでは，それぞれの選手が 1 ポイント取るごとに，

$$0 \to 15 \to 30 \to 40$$

とスコアが変化し，さらに 1 ポイント取るとそのゲームを取ることになる．ただし，プレーヤーのスコアが二人とも 40 となった場合にはデュースとなり，2 ポイント差をつけるとそのゲームを取る．プレーヤー A とプレーヤー B が試合をし，それぞれのポイントを取る確率が p と $q = 1 - p$ であるとき，プレーヤー A が 1 ゲーム取る確率を求めよ．

問題 2 (難易度 $\star\star$). あるゲームは 1 回行うのに 1 枚のが必要で，負ければ硬貨は没収され，勝てば硬貨 2 枚がもらえて硬貨が 1 枚増える．ゲームに勝つ確率は $\frac{1}{2}$ とする．最初硬貨を n 枚持っていて，硬貨がなくなるまでゲームを繰り返す時，ゲームを行う回数 X の期待値を求めよ．

問題 3 (難易度 $\star\star\star$). 表が出る確率が p である硬貨を n 回連続で表が出るまで繰り返し投げる．投げた回数 X の期待値を求めよ．

懸賞問題 B

問題 4 (難易度 $\star$). ある人は仕事を持っていない場合は毎日確率 p で仕事を見つける．仕事を持っている場合は毎日確率 q で仕事を辞める．この人がある日に仕事を持っている確率を求めよ．ただし，$p+q<1$ とする．

問題 5 (難易度 $\star\star$). あるゲームは 1 回行うのに 1 枚のが必要で，負ければ硬貨は没収され，勝てば硬貨 2 枚がもらえて硬貨が 1 枚増える．ゲームに勝つ確率は $p>\frac{1}{2}$ とする．このゲームを繰り返し行い，硬貨がなくなることを破産すると呼ぶ．破産する確率を $\epsilon>0$ 以下とするためには，最初に硬貨は何枚持っていればよいか．

問題 6 (難易度 $\star\star\star$). $X\sim\mathrm{Bi}(n,p)$ とする．ド・モアブル-ラプラスの定理と半数補正により，

$$P(X\leq k)\simeq\Phi(\frac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}})$$

である．k を整数の範囲で動かした時の一様ノルムでの誤差

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|P(X\leq k)-\Phi(\frac{k-np+\frac{1}{2}}{\sqrt{npq}})|$$

を評価せよ．