問題 1. $\{X_i\}$ はそれぞれ一様分布 $U(0,1)$ に従う独立同分布の確率変数列とする．

(1) X_1 の密度関数を書け．
(2) (X_1, X_2) の同時密度関数を書け．
(3) $X_1 + X_2$ の密度関数を求めよ．
(4) $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ とする．S_n の期待値と分散を求めよ．

問題 2. X はパラメータ $\lambda > 0$ を持つ指数分布に従うとする．すなわち，密度関数 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ を持つ．

(1) X の累積分布関数を求めよ．
(2) 非負の自然数 k に対して，$P(k \le X \le k+1)$ を求めよ．
(3) X の期待値と分散を求めよ．

問題 3. 表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを 100 回投げたとき，表の出る回数が 40 回以上 60 回以下である確率を求めよ．ただし，正規分布で近似するものとし，半数補正を入れること．また $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ として，$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ を使って解答せよ．

問題 4. X は密度関数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ を持つ標準正規分布に従うとする．

(1) X の積率母関数 $M(t)$ を求めよ．
(2) $n = 1, 2, 3, 4$ に対して，$E[X^n]$ を求めよ．

問題 5. 表と裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを繰り返し投げて，n 回連続して表が出るまで投げる回数の期待値を求めよ．

解答

問題 1. (1) $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (o.w.) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1) \\ 0 & (o.w.) \end{cases}$

(3) $D = \{(x,y) \mid x+y \le z\}$ とすれば，$P(X_1+X_2 \le z) = \int_D f(x,y)dxdy$. $z<0$ のとき $P(X_1+X_2 \le z) = 0$. $0 \le z \le 1$ のとき $P(X_1+X_2 \le z) = \frac{z^2}{2}$. $1 < z \le 2$ のとき $P(X_1+X_2 \le z) = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$. $z > 2$ のとき $P(X_1+X_2 \le z) = 1$. これらを微分して，

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z<0) \\ z & (0 \le z \le 1) \\ z-2 & (1 < z \le 2) \\ 0 & (z > 2) \end{cases}$$

(4) $E[X_1] = \frac{1}{2}$, $E[X_1^2] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ より $V[X_1] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. よって，$E[S_n] = \frac{n}{2}$, $V[S_n] = \frac{n}{12}$.

問題 2. (1) $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

(2) $P(k \le X \le k+1) = F(k+1) - F(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda})$.

(3) $E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = [x(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty(-e^{-\lambda x})dx = [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$.
$E[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = [x^2(-e^{-\lambda x})]_0^\infty - \int_0^\infty 2x(-e^{-\lambda x})dx = \frac{2}{\lambda}E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$. よって，$V[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

問題 3. 表の出る回数を X とすると，$X \sim \mathrm{Bi}(100, 1/2)$. 半数補正して正規分布近似すると，$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ として，

$$P(40 \le X \le 60) \approx P(\frac{40 - 1/2 - 50}{\sqrt{100 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \le Z \le \frac{60 + 1/2 - 50}{\sqrt{100 \cdot 1/2 \cdot 1/2}})$$

これは，$P(-\frac{21}{10} \le Z \le \frac{21}{10}) = 2\Phi(2.1)$ である．

問題 4. (1) $M(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x^2/2)dx$. ここで，$tx - x^2/2 = -\frac{(x-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}$ より，$M(t) = \exp(\frac{t^2}{2})$.

(2) $M^{(n)}(t) = E[X^n e^{tX}]$ より $E[X^n] = M^{(n)}(0)$. $M'(t) = t\exp(t^2/2)$, $M''(t) = \exp(t^2/2) + t^2\exp(t^2/2) = (t^2+1)\exp(t^2/2)$, $M^{(3)}(t) = 2t\exp(t^2/2) + (t^2+1)t\exp(t^2/2) = (t^3+3t)\exp(t^2/2)$. $M^{(4)}(t) = (t(t^3+3t) + (3t^2+3))\exp(t^2/2) = (t^4+6t^2+3)\exp(t^2/2)$. よって，$E[X] = E[X^3] = 0$, $E[X^2] = 1$, $E[X^4] = 3$.

問題 5. 表が k 回出ている状態から終わるまでの回数の期待値を x_k とする．求めるのは x_0 である．$x_n = 0$ である．$0 \le k < n$ の k に対して，$x_k = \frac{1}{2}(x_{k+1}+1) + \frac{1}{2}(x_0+1)$，つまり $x_{k+1} - 2x_k + x_0 + 2 = 0$，$\frac{x_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{x_k}{2^k} + \frac{x_0+2}{2^{k+1}} = 0$. これを $k = 0, 1, \cdots, n-1$ まで足すと，$\frac{x_n}{2^n} - \frac{x_0}{2^0} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_0+2}{2^{k+1}} = 0$. $x_n = 0$ を代入して，$-x_0 + \frac{x_0+2}{2} \cdot \frac{1-2^{-n}}{1-1/2} = 0$ より $x_0 = 2(2^n - 1)$.

配点.

問 1.(1)5 点，(2)5 点，(3)10 点，(4)5 点，5 点

問 2.(1)5 点，(2)5 点，(3)5 点，10 点

問 3.15 点

問 4.(1)10 点，(2)10 点

問 5.10 点