2019 年度明治大学理工学部「関数論 1」「関数論 1 演習」補講 担当：宮部賢志

- 試験日程：7 月 6 日 (土)1 限，2 限に正答解説
- 教科書・ノート持ち込み及び閲覧可
- 単位判定には使用しないが，試験結果の統計データは公開する

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．

問題 1. $z^3 = -8i$ となる z をすべて求め，$a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ の形で書け．

問題 2. $\tan z = \frac{3}{5}i$ を満たす z をすべて求めよ．

問題 3. $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$ を複素微分せよ．

問題 4. $f(z) = z^i$ を複素微分せよ．

問題 5. $f(z) = z\mathrm{Log}z$ を複素微分せよ．

問題 6. 領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対して，複素関数 $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ は正則で，その微分 $g'(z)$ は $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ となることを示せ．

問題 7. $u(x, y) = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ とする．$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則関数となるような v すべて求め，x, y の式で表せ．ここで，$\tan^{-1}(x)$ は $\tan$ の逆関数で，その導関数は $\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{x^2+1}$ であることを使うと良い．

問題 8. C を円 $|z| = r > 0$ を正の向きに 1 周する曲線とする．線積分 $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}(z) dz$ を求めよ．

解答

問題 1. $z = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}))$，$n = 0, 1, 2$. $n = 0$ のときは $z = 2i$. $n = 1$ のときは $\frac{7}{6}\pi$ より $z = -\sqrt{3} - i$. $n = 2$ のときは $\frac{11}{6}\pi$ より $z = \sqrt{3} - i$.

問題 2. $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}$. これが $\frac{3}{5}i$ となることから，$e^{iz} = X$ とおいて，$\frac{X - X^{-1}}{i(X + X^{-1})} = \frac{3}{5}i$, $5(X^2 - 1) = -3(X^2 + 1)$, $8X^2 = 2$, $X = \pm\frac{1}{2}$. $e^{iz} = \pm\frac{1}{2}$ より，$iz = -\ln 2 + n\pi i$ で，$z = (\ln 2)i + n\pi$.

問題 3. $f' = \frac{z - i - (z + i)}{(z - i)^2} = \frac{-2i}{(z - i)^2}$

問題 4. $f(z) = \exp(i\log(z))$ より，$f'(z) = \exp(i\log(z)) \cdot \frac{i}{z} = iz^{i-1}$.

問題 5. $f' = z\frac{1}{z} + \mathrm{Log}z = \mathrm{Log}z + 1$

問題 6. $\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z} + \overline{h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z} + \overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} \to \overline{f'(\overline{z})}$

問題 7. CR より $v_x = -u_y = -\frac{1}{y^2/x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$, $v_y = u_x = \frac{1}{y^2/x^2 + 1} \cdot y \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$. v_x を x で積分して，$v = -\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + g(y)$. これを y で偏微分して，$v_y = -\frac{y}{x^2 + y^2} + g'(y)$. 以上から，$v = -\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + c$, $c \in \mathbb{R}$. ちなみにこれは，$f = \theta - (\log r)i = -i(\log r + i\theta) = -i\log(z)$ である．

問題 8. C を $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ とパラメータ表示すると，$\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$, $\frac{dz}{d\theta} = rie^{i\theta} = -r\sin\theta + ir\cos\theta$ より，求める線積分 I は，

$$I = \int_0^{2\pi} r\cos\theta(-r\sin\theta + ir\cos\theta)d\theta$$

ここで，$\cos\theta\sin\theta = \frac{\sin(2\theta)}{2}$, $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$ より，

$$I = r^2 i\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = \pi r^2 i$$