2019 年度明治大学理工学部「関数論 1」「関数論 1 演習」第 2 回中間試験　　担当：宮部賢志

- 試験日程：7 月 3 日 (水)1 限，2 限に正答解説
- 教科書・ノート持ち込み及び閲覧可
- 単位判定には使用しないが，試験結果の統計データは公開する

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．

問題 1.

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{\sin z}{z}\right) & (z \neq 0) \\ c & (z = 0) \end{cases}$$

とおいたとき，f が連続であるとする．

(1) $c \in \mathbb{C}$ の値を求めよ．

(2) f が解析関数であることを示し，$f''(0)$ の値を求めよ．

問題 2. $a_n = \dfrac{n^2}{4^n + n^3}$ とする．べき級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を求めよ．

問題 3. (1) 複素微分可能な点において成り立つコーシー・リーマンの関係式を書け．

(2) 証明を与えよ．

問題 4. $\mathrm{Re} f(x+iy) = x^2 + y^2$ を満たす正則な関数 f は存在しないことを示せ．

問題 5. 解析関数 $f = u + iv$ の実部・虚部は，ラプラス方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ を満たすことを示せ．

問題 6. C を円 $|z| = r > 0$ を正の向きに回る曲線とする．線積分 $\int_C \overline{z} dz$ を求めよ．

問題 7. f を $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射とする．複素数の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が A に絶対収束しているとする．このとき，$\sum_{n=0}^{\infty} z_{f(n)}$ も A に絶対収束することを示せ．

解答

問題 1. (1) $\frac{\sin z}{z} \to 1$ より，$f \to e = c$.

(2) f は $z=0$ を中心にべき級数に展開できて，全平面で解析関数である．$f'(z) = \exp(\sin z/z) \cdot (\sin z/z)'$．$f''(z) = \exp(\sin z/z) \cdot ((\sin z/z)')^2 + \exp(\sin z/z) \cdot (\sin z/z)''$．$\sin z = z - z^3/3! + \cdots$ より，$\sin z/z = 1 - z^2/3! + \cdots$, $(\sin z/z)' = -z/3 + \cdots$, $(\sin z/z)'' = -1/3 + \cdots$．よって，$f''(0) = -\frac{e}{3}$.

問題 2.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2}{4^n + n^3} \cdot \frac{4^{n+1} + (n+1)^3}{(n+1)^2} \to 4$$

問題 3. 略

問題 4. $f = u + iv$ とすると，$u = x^2 + y^2$ で $u_x = 2x$, $u_y = 2y$．CR より $v_x = -2y$, $v_y = 2x$．前者から $v = -2xy + g(y)$ で，$v_y = -2x + g'(y)$．よって，$g'(y) = 4x$．y を固定したとき，これが成立するような x は高々 1 つ．つまりどんな領域でも正則ではない．

問題 5. 解析関数は無限回微分可能なので，u, v の 2 階偏微分は存在する．CR を使って，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = v_{yx}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial (-v_x)}{\partial y} = -v_{xy}.$$

v が C^2 級であることから，これらの和は 0. 同様に，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial (-u_y)}{\partial x} = -u_{yx}.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = u_{xy}.$$

問題 6. $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta < 2\pi$ とパラメータ表示すると，$\overline{z} = re^{-i\theta}$ で，$dz/d\theta = rie^{i\theta}$ より，

$$\int_0^{2\pi} re^{-i\theta} rie^{i\theta} d\theta = 2\pi r^2 i.$$

問題 7. (授業で配布したものから修正あり) $\epsilon > 0$ を固定する．$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束することから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$\sum_{n>N}^{\infty} |z_n| < \epsilon$ を満たす．また，f は全単射なので，ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $m \ge M$ で，$\{f(0), f(1), \cdots, f(m)\} \supseteq \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ となるようにできる．よって，

$$|\sum_{n=0}^{m} z_{f(n)} - \sum_{n=0}^{\infty} z_n| \le \sum_{n>N}^{\infty} |z_n| < \epsilon$$

ϵ は任意なので，$\sum_{n=0}^{N} z_{f(n)}$ は A に収束する．

更に，

$$\sum_{n>m} |z_{f(n)}| \le \sum_{n>N} |z_n| < \epsilon$$

より絶対収束する．

問 5 と問 7 は 15 点．それ以外は小問ごとに 10 点．

問題 1. 新しい問題なので，難しかったと思う．閉じた式とべき級数の使い分けが鍵．

問題 2. 指数を含む式の極限処理ができるようになろう．e^x が任意の多項式よりも速く発散することは，テイラー展開から分かる．

問題 3. CR とその逆はそれぞれ証明を覚えておきましょう．

問題 4. CR を使うところまではよくできていた．CR は各点ごとの主張で，正則性は領域の話．ここの議論をきちんと書けるかを問うている．

問題 5. 解析関数であることから 2 階偏微分の存在と偏微分の交換が出る，という部分をきちんと書けるか．

問題 6. よくできていた．

問題 7. 諦めた人が多かったみたい．