2019 年度明治大学理工学部「関数論 1」「関数論 1 演習」中間試験　　担当：宮部賢志

- 試験日程：5 月 29 日 (水)1 限，2 限に正答解説
- 教科書・ノート持ち込み及び閲覧可
- 単位判定には使用しないが，試験結果の統計データは公開する

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．

問題 1. $z^6 = -8$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，$a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 2. $\exp(2z) = \exp(\overline{z})$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，$a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 3. $\sin z = \frac{e - e^{-1}}{2} i$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，それぞれを $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 4. $(-i)^{(\frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{\pi} i)}$ の主値を求め，$a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 5. 必要ならば，$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$, $(2n)! = (2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2$ を使って以下の問に解答せよ．

(1) $\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ の $z = 0$ を中心とするべき級数展開を求めよ．
(2) $w = \sin z$ としたとき，$\frac{dz}{dw}$ を w の式で表せ．
(3) $\arcsin w$ の $w = 0$ を中心とするべき級数展開を求め，その収束半径を答えよ．

問題 6.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

とおく．

(1) f の収束半径 ρ を求めよ．
(2) f の導関数 $f' = \frac{df}{dz}$ を (べき級数を使わない)z の式で表せ．
(3) $f(1/2)$ を求めよ．

問題 7. べき級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円の内部で微分可能であることを示せ．

問題 8. 複素級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が絶対収束するとき，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} a_k a_{n-k} \right)$$

が成立することを示せ．ただし，$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ である．

解答

問題 1 (10 点)**.** $z = re^{i\theta}$ とおくと，$z^6 = r^6 e^{6i\theta}$, $-8 = 8e^{\pi i}$ より，$r^6 = 8$, $6\theta = \pi + 2n\pi$ なので，$r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{6}n\pi$．$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対応して，$z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$, $-\sqrt{2}i$, $\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)$．よって，$z = \pm\sqrt{2}i$, $\frac{\pm\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{2}$ (複合任意).

問題 2 (10 点)**.** $2z = \overline{z} + 2n\pi i$ で，$z = x + iy$ をおくと，$2x + 2yi = x - yi + 2n\pi i$ なので，$x = 0$, $y = \frac{2n\pi i}{3}$．よって，$z = \frac{2n\pi i}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

問題 3 (10 点)**.** $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ これが $\sinh(1)i$ に等しい．実部が 0 で，$\cosh y > 0$ より，$\sin x = 0$ より $\cos x = \pm 1$．$\cos x = 1$ のときは $\sinh y = \sinh(1)$ より $y = 1$．$\cos x = -1$ のときは $-\sinh y = \sinh(1)$ より $y = -1$．これから，$x = 2n\pi$, $y = \pm 1$. よって $z = 2n\pi + i$ または $z = (2n+1)\pi - i$, $n \in \mathbb{Z}$.

問題 4 (10 点)**.** $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ より $\log(-i)$ の主値は $-\frac{\pi}{2}i$．よって，$(-i)^{(\frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{\pi}i)} = \exp((\frac{1}{3} - \frac{\ln 3}{\pi}i) \cdot (-\frac{\pi}{2}i)) = \exp(-\frac{\ln 3}{2} - \frac{\pi}{6}i) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$.

問題 5 (5 点 ×3)**.** (1) $(1 - w^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-w^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} w^{2n}$

(2) $\frac{dw}{dz} = \cos z = \sqrt{1 - w^2}$ より，$\frac{dz}{dw} = (1 - w^2)^{-1/2}$

(3) $z = 0$ のとき $w = 0$ であることから，$\arcsin(w) = z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} \frac{w^{2n+1}}{2n+1}$

問題 6 (5 点 ×3)**.** (1) ratio test より，$\rho = 1$.

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$

(3) f を $\mathbb{R}$ 上の関数と見れば，$f(x) = -\log(1 - x)$ となることから，$f(1/2) = \log 2$. この議論は複素数でも成立することを後に見る．

問題 7 (20 点)**.** $f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $g_N(z) = \sum_{n=1}^{N} n a_n z^{n-1}$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ とおく．f の収束半径を ρ とする．$\sqrt[n]{n} = 1$ なのでコーシーアダマールの公式から g の収束半径も ρ である．収束円の内部の点 z_0 を固定する．$|z_0| < \rho$ である．$|z_0| < R < \rho$ を満たす実数 R をとる．$\epsilon > 0$ を固定する．$z = R$ で $g(z)$ が絶対収束することから，$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|R^n < \frac{\epsilon}{3}$ となるような $N \in \mathbb{N}$ が存在する．$n \geq N + 1$ となる $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|z|, |z_0| < R$ であれば，

$$|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}| = |z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z_0^{n-1}| \leq nR^{n-1}$$

なので，

$$|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \frac{f_N(z) - f_N(z_0)}{z - z_0}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|R^{n-1} < \frac{\epsilon}{3}$$

である．更に，$f_N'(z_0) = g_N(z_0)$ より，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < |z - z_0| < \delta$ となる z に対して，

$$|\frac{f_N(z) - f_N(z_0)}{z - z_0} - g_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

である．必要なら δ を小さく取り直して，$0 < |z - z_0| < \delta$ ならば $|z| < R$ が満たされるとして良

い．すると，$0 < |z - z_0| < \delta$ となる z に対して，

$$
\begin{aligned}
&|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)| \\
\leq &|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f_N(z)-f_N(z_0)}{z-z_0}| + |\frac{f_N(z)-f_N(z_0)}{z-z_0} - g_N(z_0)| + |g_N(z_0) - g(z_0)| \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

ϵ は任意であったから，これは $f'(z_0) = g(z_0)$ であることを意味する．

問題 8 (10 点)**.**

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{N} a_n^2 + 2\sum_{n=1}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} a_k a_{n-k}\right) - (\sum_{n=0}^{N} a_n)^2 \\
=&(a_0 a_{N+1} + \cdots + a_0 a_{2N}) + (a_1 a_{N+1} \cdots + a_1 a_{2N-1}) + \cdots + a_{N-1}a_{N+1} \\
\leq&(|a_0| + \cdots + |a_{N-1}|)(|a_{N+1}| + \cdots + |a_{2N}|) \to 0
\end{aligned}
$$

講評

問題 1. 6 次方程式なのだから，解は 6 個あるはず.
$a+bi$ の形で書けという指示があるのだから，従おう.
$\sqrt[6]{8}$ は流石に不自然すぎる.

問題 2. 比較的できていた.

問題 3. 比較的できていた.

問題 4. $\exp(-\frac{\ln 3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ の変形ができない人多し.

問題 5. (1) 一般化された二項定理を使う問題．気づかない人が多かった模様.
(2) 比較的できていた.
(3) 難しかったか...

問題 6. (1) 比較的できていた.
(2) 比較的できていた.
(3) 授業では説明していない手法ではあったが，気づいた人も多かった.

問題 7. ノートを写したように見える人が多かったが，見なくてもできるようになろう.

問題 8. 標準的な例題．証明を覚えておくと，このような問題に対して，覚えていた証明を少し変形することで，解けるようになる．こういう問題が解けるようになろう.