2019 年度明治大学理工学部「関数論 1」期末試験 A　　担当：宮部賢志

問題 1. $z_1 = 1-3i$, $z_2 = -2+5i$ のとき，$\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$ を $a+bi$, (a, b は実数) の形で表わせ.

問題 2. $(1+i)^n = (1-i)^n$ を満たす 100 以下の正の整数は何個あるか.

問題 3. べき級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$ の収束半径を求めよ.

問題 4. $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right)$ の値を $a+bi$, (a, b は実数) の形で表わせ.

問題 5. $\left(e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{\frac{1+i}{4}}$ の主値を求めよ．ただし，偏角の主値は $(-\pi, \pi]$ の間とする.

問題 6. 複素数関数 $f(z) = \dfrac{z-1+i}{z+1+i}$ の導関数を求めよ.

問題 7. $f(z) = \overline{z}^2 + \overline{z}$ が複素微分可能な点をすべて求めよ.

問題 8. $\sin(z) = u + iv$ とおき，u, v の 1 階偏微分 u_x, u_y, v_x, v_y を計算せよ.

問題 9. C を $1+i$ から $2+3i$ までの線分として，線積分 $\displaystyle\int_C z^2 dz$ を求めよ.

問題 10. C を円 $|z| = 2$ を正の向きに 1 周する曲線とする．線積分 $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2} dz$ を求めよ.

解答

問題 1.

$$\frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{1+3i}{-2+5i} = \frac{(1+3i)(-2-5i)}{29} = \frac{13}{29} - \frac{11}{29}i$$

問題 2. $(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i})^n = (\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i})^n$ より，$e^{n\frac{\pi}{2}i} = 1$ で，$n\frac{\pi}{2} = 2k\pi$．すなわち $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$．これを満たす n は 25 個.

問題 3. ratio test より，$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$

問題 4. $\alpha = \frac{\pi}{2} + i$ とおくと，$e^{i\alpha} = e^{-1+\frac{\pi}{2}i} = \frac{i}{e}$ より，$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} = \frac{i/e-e(-i)}{2i} = \frac{e^2+1}{2e}$. (別解) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+i\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cosh 1 + i\cos\frac{\pi}{2}\sinh 1 = \frac{e^1+e^{-1}}{2} = \frac{e^2+1}{2e}$.

問題 5. $\log(e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}i$ で，$\frac{1+i}{4}(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}i) = \frac{\pi}{6}i$ なので，求める値は $\exp(\frac{\pi}{6}i) = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

問題 6.

$$f'(z) = \frac{z+1+i-(z-1+i)}{(z+1+i)^2} = \frac{2}{(z+1+i)^2}$$

問題 7. $f(x+iy) = (x-iy)^2 + (x-iy) = x^2 - y^2 + x + i(-2xy - y) = u + iv$. $u_x = 2x+1$, $u_y = -2y$, $v_x = -2y$, $v_y = -2x-1$. CR 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を解いて，$x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$. この点の近傍で偏導関数は存在し，この点で連続なので，CR の逆よりこの点で f は微分可能．よって，微分可能な点は $z = -\frac{1}{2}$ のみ.

問題 8. $\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ より，$u_x = \cos x\cosh y$, $u_y = \sin x\sinh y$, $v_x = -\sin x\sinh y$, $v_y = \cos x\cosh y$.

問題 9. 曲線 C を $z(t) = 1+i+(1+2i)t$, $0 \le t \le 1$ としてパラメータを取ると，$\frac{dz}{dt} = 1+2i$ より，

$$\begin{aligned}\int_C z^2dz = \int_0^1 (1+i+(1+2i)t)^2(1+2i)dt &= \int_0^1((-11-2i)t^2-(14-2i)t-(4-2i))dt \\ &= \frac{-11-2i}{3} - (7-i) - (4-2i) = -\frac{44}{3} + \frac{7}{3}i\end{aligned}$$

(別解) 被積分関数は全平面で正則なので，$\int_C z^2dz = [\frac{1}{3}z^3]_{1+i}^{2+3i} = -\frac{44}{3} + \frac{7}{3}i$.

問題 10. C を $z = 2e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ とパラメータ表示すれば，$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4}e^{-2i\theta}$, $\frac{dz}{d\theta} = 2ie^{i\theta}$ より，求める線積分 I は,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}e^{-2i\theta}2ie^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{2i}{4}(\cos\theta - i\sin\theta)d\theta = 0$$

講評

1 問 10 点 $\times 10$ 問.

些細なミスが 1 つの場合は 5 点．複数の些細なミスの場合は 3 点．最初の方でミスをしているが，方針は合っている場合も 3 点.

問題 1. ほとんどの人ができていた.

問題 2. ほとんどの人ができていた.

問題 3. ほとんどの人ができていた．時々，$\frac{1}{4}$ の人がいた.

問題 4. $\cosh(1)$ の部分が，$\cosh(i)$ になっていたり，$\cos(1)$ になっていたり.

問題 5. べき乗の主値と log の主値との混同が時々見られる.

$e^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\pi/3+\pi/3i}$ であるが，いつの間にか i がなくなって，$e^{\frac{2\pi}{3}}$ になる人が多い.

$e^{\frac{\pi}{6}i}$ のままになっている人も.

問題 6. 分母を展開していても，もちろん良い.

問題 7. 展開，偏微分，CR の適用，方程式を解く，などのうちどこかでミスをする人が多い．$(x,y) = (-1/2, 0)$ という解も正解にしたが，$z = -1/2$ と書いたほうが良い.

問題 8. $\cosh(y), \sinh(y)$ の偏微分ができるかどうか.

問題 9. まずパラメータの置き方が大事．後々の計算を考えれば，$0 \leq t \leq 1$ で置くのが楽だと思われるが，なぜか $1 \leq t \leq 2$ で置く人も多かった.

書き方として，$z(t) = 1+t+i(1+2t)$ と書く人もいて，間違いではないが，$z(t) = 1+i+(1+2i)t$ の方が見やすいのでは.

積分計算のミスも目立った.

多重積分 $\iint dxdy$ が出てきている人がいたが，なぜ？

問題 10. $z = re^{i\theta}$ とおいて，最後まで r が残っているのは，なぜ？ θ での微分のはずが，r も変数になっていたり...

$e^{-i\theta}$ の積分の処理の仕方がいろいろ．基本は実部と虚部に分ける．原始関数 $\frac{1}{-i}e^{-i\theta}$ を使っても良いが，その場合に $e^{-2\pi i} = 1$ の変形ができずに残っている人も多かった.

問題 1. 次の下線部の定義が分かるように，次の文を書き換えよ．

(1) 複素関数 $f(z)$ は $z = w$ で<u>微分可能</u>である．

(2) 複素関数 $f(z)$ は領域 D で<u>解析的</u>である．

(3) 複素関数 $f(z)$ は領域 D で<u>正則</u>である．

問題 2.

$$f(z) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1-\cos z}{z^2}\right) & (z \neq 0) \\ c & (z = 0) \end{cases}$$

とおいたとき，f が連続であるとする．

(1) $c \in \mathbb{C}$ の値を求めよ．

(2) f が解析関数であることを示し，$f''(0)$ の値を求めよ．

問題 3. 複素数列 $\{z_n\}$ について，

(1) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} < 1$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は絶対収束する，

(2) $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} > 1$ のとき，$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は発散する，

ことを示せ．

問題 4. べき級数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

は収束円の内部で連続であることを示せ．

問題 5. 複素関数 $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ がある点で微分可能であれば，その点でコーシー・リーマンの関係式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成り立つことを示せ．

解答

問題 1. 省略

問題 2. (1) $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$ より，$g(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{24} + \cdots$ である．連続性から，$c = \sqrt{e}$.

(2) $z = 0$ を中心とするべき級数で書けていて，その収束半径は無限大であるから，解析関数．$f'(z) = \exp(g(z))g'(z)$, $f''(z) = \exp(g(z))g'(z) + \exp(g(z))g''(z)$ より，$f''(0) = \sqrt{e}g'(0) + \sqrt{e}g''(0)$. $g'(0) = 0$, $g''(0) = -\frac{1}{12}$ より，$f''(0) = -\frac{\sqrt{e}}{12}$.

問題 3. $\limsup = \rho$ とおく．

(1) $\rho < R < 1$ を満たすように R をとる．ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，すべての $n \geq N$ で，$|z_n| < R^n$ である．よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \leq \sum_{n \leq N} |z_n| + \sum_{n > N} R^n < \infty.$$

(2) $1 < R < \rho$ を満たすように R をとる．任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，ある $n > N$ が存在して，$|z_n| > R^n > 1$. よって，級数は発散する．

問題 4. $f(z)$ の収束半径を ρ とする．$|z_0| < \rho$ を満たす z_0 を固定し，この点で $f(z)$ が連続であることを示そう．

$\epsilon > 0$ を固定する．$f_N = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ とおく．$|z_0| < R < \rho$ を満たす R をとる．ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$|z| \leq R$ となるすべての z について，

$$|f(z) - f_N(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| R^n < \frac{\epsilon}{3}$$

この $f_N(z)$ は多項式だから $z = z_0$ で連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，$0 < |z - z_0| < \delta$ を満たすすべての z について，

$$|f(z)_N - f_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

必要なら δ を小さくして，$|z - z_0| < \delta$ ならば $|z| \leq R$ となると仮定して良い．このとき，$0 < |z - z_0| < \delta$ を満たすすべての z について，

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| \leq& |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\ <& \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

ϵ は任意だったので，これは f が z_0 で連続であることを意味している．

問題 5. 省略

講評

問 2(2) は 2 問と数えて，1 問 10 点 ×10 問.

問題 1. (1) よくできていた．

(2) よくできていた．「各点の近傍」の部分が書けない人が見られた．

(3) よくできていた．

問題 2. (1) ロピタルの定理は実数に関するものなのでそのままは使えない．極限の存在が保証されている場合に，「実数の場合と一致するから」との但し書きがあれば論理は通る．採点では減点しなかった．

(2) 言葉足らずの人が多い．$\frac{1-\cos z}{z^2}$ がべき級数表示できること，その収束半径が無限大であること，べき級数関数が合成もべき級数関数となること，その収束半径が無限大であること，などの確認が必要．採点としては間違ったことが書いてなければ甘めに採点した．

問題 3. 「公式から」ではだめ．

ポイントは「十分大きな n で」「無限に多くの n で」に相当する内容がきちんと書けているかどうか．

「$|z_n|$ が 0 に収束するので，$\sum |z_n|$ も収束する」と書いている人がいたが，これは成り立たない．例えば，$\frac{1}{n} \to 0$ だが，$\sum \frac{1}{n} = \infty$ である．

問題 4. 微分可能であることを示している人もいた．微分可能ならば連続なので，正しく書けていれば，点数を与えた．

一様収束の部分の議論がやはり難しいようだった．

問題 5. よくできていた．