問題 1. $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ の絶対値を求めよ.

問題 2. $\alpha = a+bi,\, b \neq 0$ のとき，$\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ が実数になるための a, b の条件を求めよ.

年　　組　　番　　名前:

問題 3. 次の値の極形式を求めよ.

(1) $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$　　(2) $(2+2i)^3$

問題 4. $z = re^{i\theta}$ のとき $\frac{1}{1-z}$ の実部・虚部を r, θ で表わせ.

年　　組　　番　　名前:

定理 (Cauchy の判定条件)**.** 複素数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は,

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{p>0}|\alpha_N-\alpha_{N+p}|=0$$

が成り立つことである.

問題 5. これの証明を与えよ.

年　　組　　番　　名前:

定理. $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n$ が絶対収束するとき,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right).$$

問題 6. これの証明を与えよ.

年　　組　　番　　名前:

定理. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ が $z = z_0$ で収束すれば，$|z| < |z_0|$ で絶対収束する．$z = z_0$ で発散すれば $|z| > |z_0|$ でも発散する．

問題 7. これの証明を与えよ．

年　　組　　番　　名前:

定理 (Cauchy-Hadamard の公式)**.** べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径を ρ とすると,

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

問題 8. これの証明を与えよ.

問題 9. 次のべき級数の収束半径を求めよ.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2^n}$

年　　組　　番　　名前:

問題 10. べき級数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

は収束円の内部で連続であることを示せ.

年　　組　　番　　名前:

問題 11. 関数

$$\exp(-\frac{xz}{1-z})$$

の $z=0$ でのべき級数展開を z^3 まで求めよ．係数は x に関して降べきに整理せよ．

年　　組　　番　　名前:

問題 12. $\exp(i\bar{z}) = -\overline{\exp(z)}$ を満たす z をすべて求めよ.

問題 13. $\cos(z) = \cosh(4)$ を満たす z をすべて求めよ.

年　　組　　番　　名前:

問題 14. $|\sin(iy)| > 1$ となる $y \in \mathbb{R}$ の範囲を求めよ.

問題 15. $\sin z = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

年　　組　　番　　名前:

問題 16. $\sin z = 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

問題 17. $\mathrm{Log}(z) = \frac{\pi}{4} i$ を満たす z をすべて求めよ.

年　組　番　名前:

問題 18. $(-i)^{-i}$ のとりうる値をすべて求めよ．

問題 19. 実数 $x < 0$ に対して，$\lim_{\epsilon \to 0+0}(x \pm i\epsilon)^{\alpha}$ を求めよ．ただし，偏角の主値は $(-\pi, \pi]$ とせよ．

年　　組　　番　名前:

問題 20. 次の文を下線部の定義が分かるように書き直せ.

(1) 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が $z = z_0$ で<u>微分可能</u>である.

(2) 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が領域 D で<u>解析的</u>である.

(3) 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が領域 D で<u>正則</u>である.

(4) 関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が<u>整関数</u>である.

年　　組　　番　　名前:

問題 21. 次の関数が正則かどうか調べよ.

(1) $x^2 + iy$

(2) $(x^2 - y^2 + 3x) + i(2xy + 3y)$

(3) $\frac{x+k-iy}{x^2+y^2+2x+1}$, $k \in \mathbb{R}$, $(x, y) \neq (-1, 0)$.

年　　組　　番　名前:

問題 22. すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{Re} f(x+iy) = 2xy$，$f(0) = 0$ を満たす整関数 $f(z)$ を求め，z の式で表わせ.

年　　組　　番　名前:

問題 23. $z \neq 0$ となるすべての $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$ を満たす，$z \neq 0$ で正則な複素関数 $f(z)$ をすべて求めよ.

年　　組　　番　　名前:

問題 24. C を $|z|=1$ を正の向きに 1 回転する曲線として，線積分 $\int_C z^n dz$ を求めよ．

年　　組　　番　　名前:

問題 25. C を滑らかな曲線でその始点を z_1，終点を z_2 とする．z の C 上の線積分は

$$\int_C z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

となることを示せ.

年　　組　　番　　名前: