2019 年度「解析学展望 1」レポート課題　　　　担当：宮部賢志

提出方法等はすでに指示されているものに準ずる．

問題 1. $d(\geq 3)$ 次元ブラウン運動が非再帰的であることを示せ．

(a) ブラウン運動を使ったディレクレ問題の解を使え．

(b) $f(x) = |x|^{2-d} = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1-d/2}$ が調和関数であることを確かめてから使え．

注意：

(1) 盗用・剽窃厳禁．

(2) 出てくる用語はきちんと定義し，授業を受けていない人でも読んで理解できるように書きなさい．

(3) 何らかの定理を使う場合，その定理の主張を正確に書くこと．定理に名前がついている場合にはその名前を，定理に特に名前がない場合には出典を述べること．

(4) 手書きでも，LaTeX でも構わない．

(5) 年，組，番号，氏名を最初に明記すること．

解答.

d 次元ブラウン運動 B_t が再帰的であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，無限に多くの t で $|B_t - B_0| < \epsilon$ となる確率が 1 となることをいう．$\sup_t |B_t| = \infty$ であることから，再帰的ならば，任意の点 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，ある t に対して $|B_t - x| < \epsilon$ となる確率は 1 である．非再帰的であることを示すには，この確率が 1 より真に小さいことを示せば十分である．実際，Kolmogorov の 0-1 法則から，再帰的でなければ，無限に多くの t で $|B_t - B_0| < \epsilon$ となる確率は 0 となる．

調和関数であることは直接の計算で確かめられるので省略する．

$0 < r_1 < r_2$ をとり，$x \in \mathbb{R}^d$ として，$r_1 < |x| < r_2$ を満たすようにとる．

$$u(x) = \frac{|x|^{2-d} - r_1^{2-d}}{r_2^{2-d} - r_1^{2-d}}$$

は調和関数で，$|x| = r_1$ なら $u(x) = 0$，$|x| = r_2$ なら $u(x) = 1$ である．このディレクレ問題の解は，d 次元ブラウン運動 B_t, $B_0 = x$ を使って以下のように書ける．

$$u(x) = E[u(B_\tau)] = P(\text{先に } |x| = r_2 \text{ となる}) \times 1 + P(\text{先に } |x| = r_1 \text{ となる}) \times 0$$

ただし，

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid |B_t| \notin (r_1, r_2)\}$$

となる停止時刻で，E は期待値を表す．ここで，$r_2 \to \infty$ とすることで，$r_2^{2-d} \to 0$ より，

$$P((\exists t)|B_t - x| < r_1) = \frac{r_1^{2-d} - |x|^{2-d}}{r_1^{2-d}} < 1$$

これは再帰的でないことを意味している．

さらに，$r_1 \to 0$ とすることにより，

$$P((\exists t)B_t = 0) = 0$$

も分かる．