2019 年度秋学期　明治大学理工学部「基礎微分積分 2」中間試験　12 月 5 日 (木)

問題 1. 次の文を論理式で表現しなさい.

(1) 実数の数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束する.
(2) $M \in \mathbb{R}$ は実数の数列 $\{a_n\}$ の上界である.
(3) $\alpha \in \mathbb{R}$ は実数の数列 $\{a_n\}$ の上限である.
(4) 実数の数列 $\{a_n\}$ はコーシー列である.

問題 2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}$ であることを，収束の定義に基づいて示せ.

問題 3. $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とする．すべての $n \in \mathbb{N}$ で $a_n \le b_n$ であれば，$\alpha \le \beta$ であることを示せ.

問題 4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ が収束することを示せ.

問題 5. 上に有界な単調増加数列はその上限に収束することを示せ．ただし「上下限の存在」は使って良い.

問題 6 (難)**.** コーシー列の収束とアルキメデスの原理から有界単調列の収束を示せ.

2019 年度秋学期　明治大学理工学部「基礎微分積分 2」中間試験解答　12 月 5 日 (木)

問題 1. (1) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, |a_n - \alpha| < \epsilon$

(2) $\forall n, a_n \leq M$

(3) $\forall n[a_n \leq \alpha] \wedge \forall \epsilon > 0 \exists k[a_k > \alpha - \epsilon]$

(4) $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \epsilon$

問題 2. 任意に $\epsilon > 0$ を固定する．$N = [\frac{1}{4\epsilon}] + 1$ とおくと，すべての自然数 $n \geq N$ に対して，

$$\left| \frac{n+1}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{4N} < \epsilon$$

が成り立つ．ϵ は任意であったから，これは $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ であることを意味する．

問題 3. $\alpha > \beta$ であると仮定する．$\epsilon = \frac{\alpha - \beta}{2} > 0$ とおくと，$\alpha = \lim_n a_n$ より，ある自然数 N_1 が存在してすべての $n \geq N_1$ に対して，$|a_n - \alpha| < \epsilon$. 同様に $\beta = \lim_n b_n$ より，ある自然数 N_2 が存在してすべての $n \geq N_2$ に対して，$|b_n - \beta| < \epsilon$. $N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，

$$b_N < \beta + \epsilon < \alpha - \epsilon < a_N$$

より矛盾．すなわち $\alpha \leq \beta$ である．

問題 4. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ とおく．数列 $\{a_n\}$ は単調非減少である．また，

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

であり，$\{a_n\}$ は上に有界である．よって，単調有界列の原理から，$\{a_n\}$ は収束する．

問題 5. 数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列とする．$\{a_n\}$ は上に有界であることから，$\{a_n\}$ には上限 α が存在する．任意に $\epsilon > 0$ を固定する．この ϵ に対して，α が上限であることから，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$a_N > \alpha - \epsilon$. $\{a_n\}$ が単調増加であることから，すべての自然数 $n \geq N$ に対して，$a_n \geq a_N > \alpha - \epsilon$. また α が上界であることから，すべての自然数 n に対して，$a_n \leq \alpha$. よって，すべての自然数 $n \geq N$ に対して，$|a_n - \alpha| < \epsilon$. ϵ は任意であったから，$\{a_n\}$ は α に収束する．

問題 6. 数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調非減少の数列とする．$\{a_n\}$ の上界の 1 つを M とする．任意の $\epsilon > 0$ を固定する．集合 $D = \{n \in \mathbb{N} : \exists m > n, a_m - a_n > \epsilon\}$ を考える．もし D が無限集合ならば，$n_1 = 1$ として，n_k が定義されているとして，n_k より大きな $n'_k \in D$ が存在し，n'_k より大きな n_{k+1} で

$$\epsilon < a_{n_{k+1}} - a_{n'_k} \leq a_{n_{k+1}} - a_{n_k}$$

となるものが存在する．このように数列 $\{n_k\}$ を定義することで，すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して，$a_{n_k} - a_1 > (k-1)\epsilon$ が成り立つ．ところがアルキメデスの公理から $M - a_1 < N\epsilon$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在するので，$a_{n_{N+1}} - a_1 > N\epsilon > M - a_1$ となり，M が $\{a_n\}$ の上界であることに矛盾．すなわち D は有限集合．D の最大値を N_0 とすれば，すべての $m \geq n > N_0$ に対し，$|a_m - a_n| \leq \epsilon$. これは $\{a_n\}$ がコーシー列であることを意味し，$\{a_n\}$ は収束する．

講評

問題 1. (1)「$\forall\epsilon > 0$」の部分が「$\forall\epsilon$」となっているものは，意味が変わるので間違い．

「$\exists N \in \mathbb{N}$」の部分が「$\exists N \in \mathbb{R}$」となっていても，同値なので OK.「$\exists N$」となっていても，実数もしくは自然数と理解して，OK とした．

「$\forall n \geq N$」が「$\forall n > N$」となっていても，全体としては同値なので OK.

(2)「$\exists M$」が余分についている場合，意味が変わるので間違い．

「$a_n \leq M$」が「$a_n < M$」になっている場合，意味が変わるので間違い．

(3)「$a_n \leq \alpha$」が「$a_n < \alpha$」になっている場合，意味が変わるので間違い．

「$\forall\epsilon > 0 \exists k[a_k > \alpha - \epsilon]$」の部分は「$\forall\beta < \alpha\exists k[a_k > \beta]$」でも OK. また「$\forall\beta < \alpha\exists x \in \{a_n\}[x > \beta]$」でも OK.

(4)「$\forall n, m > N$」の部分が，「$\forall n, m \geq N$」でも OK.「$n < m$」などの条件があっても OK.

問題 2. よくできていた．

$N = \frac{1}{\epsilon}$ のように，N として自然数ではないかもしれないものを指定しても OK.

N を定義する位置は最初のほうが望ましいが，式変形が終わった後に書いても，N と ϵ の関係が明確であれば OK.

問題 3. この問題はできる人とできない人で分かれた．

$\epsilon = \frac{\alpha-\beta}{2}$ と置くのが計算の後になっている場合，N_1 や N_2 がこの ϵ に依存していることが分かる形で書かれている必要がある．

「ある自然数 N_1 が存在して」という文章で，N_1 という自然数を定義している．正確に書くと「ある自然数 N が存在して... が成り立つ．そのような自然数の 1 つを (例えば最小のものを)N_1 と定義する.」となる．これを通常省略して「ある自然数 N_1 が存在して」と書く．しかし，これを「$\exists N_1$」と書くと，単に存在することを主張しているだけで，定義していることが分かりにくいので，避けたほうが良い．

解答例では「$b_N < a_N$」を導いて矛盾を示した．「$b_n < a_n$」となっている場合，どのような n でこれが成り立つと主張しているのかを明確にする必要がある．

(別解) 任意に $\epsilon > 0$ をとり固定する．$\alpha = \lim_n a_n$ であることから，ある自然数 N_1 が存在して，すべての $n \geq N_1$ に対して，$|a_n - \alpha| < \epsilon$. 同様に $\beta = \lim_n b_n$ であることから，ある自然数 N_2 が存在して，すべての $n \geq N_2$ に対して，$|b_n - \alpha| < \epsilon$. よって，$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすれば，

$$\alpha < a_N + \epsilon \leq b_N + \epsilon < \beta + 2\epsilon$$

ϵ は任意なので，$\alpha \leq \beta$ である．もしくは，もし $\alpha > \beta$ であれば，$\epsilon = \frac{\alpha-\beta}{2}$ とおくと，

$$\alpha < \beta + 2 \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} = \alpha$$

となって矛盾する．(別解終わり)

このように ϵ を後で定める方法もあるが，混乱しやすいので，十分に習熟するまでは避けたほうが良いかもしれない．

問題 4. 単調性と有界性を明確に書いた上で，「単調有界列の収束定理より」などの言葉があると良い．

a_n を評価するときに，$a_n < 2 - \frac{1}{n} \to 2$ としている解答が多数見えた．ここでは有界性を示すのが目的なので，$2 - \frac{1}{n} \to 2$ となることはここでは関係がないこと．関係がないことを解答に書くと，読む人が混乱する．実際，a_n は 2 には収束しない．$a_n \to \frac{\pi^2}{6}$ となることはフーリエ級数の授業などで学ぶ.

問題 5. ポイントは 3 つ.

(1) α が上限であることから，すべての n で $a_n \leq \alpha$
(2) $\alpha - \epsilon$ が上限ではないことから，ある N で $a_N > \alpha - \epsilon$
(3) a_n が単調であることから，すべての $n \geq N$ で $a_n > \alpha - \epsilon$

(1) や (3) が抜けている人が見られた.

(1) において，$a_n \leq \alpha + \epsilon$ としても間違いではないが，わざわざ弱い主張をする必要はない.

問題 6. アルキメデスの公理の使い方に工夫が必要で，短時間に解答に辿り着くのは難易度が高い．気持ちとしては，どんなに小さな $\epsilon > 0$ でも繰り返し足していけばいくらでも大きくなるので，ϵ 分だけ大きくなるのは有限回．それ以降に ϵ 分だけ大きくなることはないような項を a_N とすれば，コーシー列の条件が満たされる.