2019 年度秋学期　明治大学理工学部「基礎微分積分 2」期末試験問題　担当：宮部賢志

問題 1. 以下では α は実数の定数，$\{a_n\}$ は実数の数列，A は実数の集合，$f(x)$ は実数から実数への関数を表す．次の文を論理式で書け．

(1) $\{a_n\}$ が α に収束する．

(2) α は集合 $A \neq \emptyset$ の上限である．

(3) $\{a_n\}$ はコーシー列である．

(4) $f(x)$ は $x = a$ において連続である．

(5) $f(x)$ は区間 I で一様連続である．

問題 2. 連続な実関数 $f(x)$ に対し定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の定義を書け．

問題 3. 「微分積分学の基本定理」の主張を書け．

問題 4. $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 1} = \sqrt{2}$ であることを示せ．

問題 5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとき $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを示せ．また逆は成立しないことを反例を挙げて示せ．

問題 6. 閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ は開区間 (a, b) で微分可能であるとする．$f(x)$ が $x = c \in (a, b)$ で最大値を取るとすれば，$f'(c) = 0$ であることを示せ．

問題 7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k^2}{n^2} + 1\right) \frac{1}{n}$ を求めよ．

問題 8 (おまけ，点数には加えない)**.** 任意の実数 α に対して狭義単調増加な有理数列 $\{p_n\}_n$ で $p_0 = 0$, すべての $n \in \mathbb{N}$ で $\alpha - p_n < 2^{-2n}$ を満たすものをとる．関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \frac{2^{2n+1}}{3}(p_n - p_{n-1})(x - (1 - 2^{-n+1})) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1}) \qquad (n \geq 1,\ 1 - 2^{-n+1} \leq x < 1 - 2^{-n})$$

により定義する．このとき，(1) $f(x)$ は区間 $[0, 1)$ で連続，(2) すべての有理数 $q \in [0, 1)$ に対し $f(q)$ は有理数，(3) $\lim_{x\to 1-0} f(x)$ は存在, (4) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \alpha$，であることを示せ．

問題 1.　(1) $\forall\epsilon>0\exists N\forall n\geq N.|a_n-\alpha|<\epsilon$

(2) $A\neq\emptyset\wedge\forall x\in A.x\leq\alpha\wedge\forall y<\alpha\exists x\in A.y<x$

(3) $\forall\epsilon>0\exists N\forall n,m\geq N.|a_n-a_m|<\epsilon$

(4) $\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x.|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon$

(5) $\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x,y\in I.|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon$

問題 2. 閉区間 $[a,b]$ の分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ を Δ で表し，$i=0,\cdots,n-1$ に対し $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ を取る．$|\Delta|=\min_i|x_{i+1}-x_i|$ とおく．$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$ が存在するとき，この値を $\int_a^b f(x)dx$ と書く．

問題 3. 連続な実関数 $f(x)$ に対して $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ が成り立つ．

問題 4. 任意に $\epsilon>0$ を固定する．$\epsilon<1$ と仮定して良い．$a_n\to 1$ より，ある自然数 N が存在して，すべての $n\geq N$ に対し，$|a_n-1|<\epsilon$ である．また $a_n+1>0$ である．更に，

$$|\sqrt{a_n+1}-\sqrt{2}|=\frac{|a_n-1|}{\sqrt{a_n+1}+\sqrt{2}}<\epsilon$$

である．ϵ は任意であったから，$\sqrt{a_n+1}\to\sqrt{2}$ である．

問題 5. $b_n=\sum_{k=1}^n a_k$ とすると，$\{b_n\}_n$ は収束するのでコーシー列である．任意の $\epsilon>0$ に対し，ある自然数 N が存在して，すべての $n\geq N$ に対し，

$$|a_n|=|b_n-b_{n-1}|<\epsilon$$

が成り立つ．これは $a_n\to 0$ であることを意味する．

$a_n=\frac{1}{n}$ とすれば，$a_n\to 0$ であるが，$\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$ である．

問題 6. $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることから，$a<x<c$ に対し，

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0$$

であり，$c<x<b$ に対し，

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$

である．$f(x)$ は $x=c$ で微分可能であることから，

$$\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0,\ \lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$

で，これらが一致することから，$f'(c)=0$ である．

問題 7.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k^2}{n^2}+1\right)\frac{1}{n}=\int_0^1(x^2+1)dx=[\frac{1}{3}x^3+x]_0^1=\frac{4}{3}$$

問題 8. 各開区間 $(1-2^{-n+1}, 1-2^{-n})$ で連続であることは，$f(x)$ がこの区間で 1 次関数であることから成り立つ．$x = 1-2^{-n+1}$ のとき $f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1})$ でこの点で右連続であることは明らか．一方，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-2^{-n}-0} f(x) =& \frac{2^{2n+1}}{3}(p_n - p_{n-1})(1-2^{-n}-(1-2^{-n+1})) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1}) \\ =& \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1})\end{aligned}$$

より左連続でもある．

各開区間 $(1-2^{-n+1}, 1-2^{-n})$ で傾きは有理数，y 切片も有理数なので，すべての有理数 $q \in [0,1)$ に対して $f(q)$ は有理数である．

また $\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3} 2^{-2(k-1)} < \infty$ であるから存在する．

更に，

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{2^{k+1}}{3}(p_k - p_{k-1})\right)\frac{1}{2}$$

であるが，各 i について $\frac{2^{i+1}}{3}(p_i - p_{i-1})$ が足されるのは，$n = i$ のときに $2^{-i}\cdot\frac{1}{2}$ 個分，$n \geq i+1$ のときに $2^{-i}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$ 個分なので，

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^{i+1}}{3}(p_i - p_{i-1})\cdot\left(2^{-i}\cdot\frac{1}{2} + \sum_{n=i+1}^{\infty} 2^{-i}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}(p_i - p_{i-1}) = \alpha$$

この方法を拡張することにより，関数 $f(x)$ で，$f(x)$ は $[0,1]$ で連続，すべての有理数 $q \in [0,1]$ で $f(q)$ が有理数，$\int_0^1 f(x)dx = \alpha$ となるようなものの存在も示すことができる．

講評

問題 1. 5 点 $\times 5$ 問．部分点は基本的にはなし．

(1) よくできていた．$\epsilon > 0$ の > 0 が抜けていたり，$\forall n \geq N$ の $\geq N$ が抜けているなどのミスがいくつか．

(2) $A \neq \emptyset$ はなくても OK とした．$\emptyset$ という記号を使わない場合には「$\exists x . x \in A$」と書ける．「α が上界」の定義を書いた場合，意味が異なるので不正解．「数列 $\{a_n\}$ の上限が α」の定義を書いた場合も，不正解とした．

(3) よくできていた．$n \geq m \geq N$ や $n \geq m > N$ などでも OK.

(4) $\forall x$ が抜けていた場合，採点上は OK とした．$0 < |x-a| < \delta$ とした場合も，同値になるので OK とした．

(5) $\forall x, y \in I$ の $\in I$ が抜けていた場合，採点上は OK とした．

問題 2. 10 点．小さなミスがいくつかある場合は 5 点．

$i=0$ から $n-1$ なら x_i, x_{i+1} になるし，$i=1$ から n なら x_{i-1}, x_i になる．合わせよう．

ξ_i が端点の x_i や x_{i+1} になっていた場合は，意味が大きく変わるので，部分点とした．

問題 3. 10 点．

「関数 f が連続である」などの条件が抜けていて，式があっていれば 5 点．

証明を書いた場合は，主張の部分だけを見て採点した．

「F を f の原始関数として，$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$」などでも OK.

問題 4. 15 点．

いろいろな証明があって面白かった．

- 教科書に従って $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{|x-y|}$ の不等式を使って，$|a_n - 1| < \epsilon^2$ となる n に対し，

$$|\sqrt{a_n+1} - \sqrt{2}| \leq \sqrt{|a_n+1-2|} < \epsilon$$

とする．

- $x, y > 0$ であれば $|x-y| \leq x+y$ であることから，

$$\begin{aligned}|a_n+1-2| =& |(\sqrt{a_n+1}-\sqrt{2})(\sqrt{a_n+1}+\sqrt{2})| = |\sqrt{a_n+1}-\sqrt{2}|(\sqrt{a_n+1}+\sqrt{2}) \\ \geq& (\sqrt{a_n+1}-\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

を使う．

- $a_n + 1 \to 2$ なので $a_n + 1 = 2$ のときに等号が成立するように相加相乗調和平均の関係を使って，

$$\frac{a_n+1+2}{2} \geq \sqrt{(a_n+1) \cdot 2} \geq \frac{2}{1/(a_n+1) + 1/2} \tag{1}$$

である．$a_n \geq 1$ のとき，(1) の左側の不等式を変形して，

$$\sqrt{a_n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{a_n+3}{2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{a_n-1}{2\sqrt{2}}$$

が成り立つ．$-1 < a_n < 1$ のとき，今度は (1) の右側の不等式を変形して，

$$\sqrt{a_n+1}-\sqrt{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{1/(a_n+1)+1/2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{(a_n+1)\cdot 2}{a_n+1+2}-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{a_n+3}(a_n-1)$$

$-1 < a_n < 1$ の条件のもとでは，$\frac{\sqrt{2}}{a_n+3}$ が有界であることに注意すれば，これらの不等式から題意が証明できる．

問題 5. $a_n \to 0$ の部分が 10 点．反例の部分が 5 点．

「α に収束するとして...」という議論をしている人の方が多かったが，コーシー列を使うほうが楽だと思う．

「$a_n \to \alpha \neq 0$ と仮定して矛盾を導く」とした答案もあったが，a_n が収束しない場合もあるので，これだけでは不十分．

反例として，$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ という答案も多かったが，この場合 $\sum a_n$ は収束するので反例にならない．

問題 6. 15 点．

平均値の定理を持ち出す人が多かったが，一番の問題は，c が与えられているということ．問題で c が与えられているので，その c について議論する必要がある．平均値の定理を使うと「ある性質を満たす c が存在する」ということは分かるが，その c が問題で与えられた c と同じかどうかは分からない．

> 0 と ≥ 0 の違いは正確に．「$x = c$ で最大値をとること」「f が $x = c$ で微分可能であること」などを使ったことが明確になるように解答は作成してほしい．

問題 7. 10 点．

区分求積法の問題．普通に $\sum$ の計算をしてから極限計算をして答えを出した人がたくさんいた．

問題 8. 手をつけた人はほとんどいなかったが，ここでは以下のより強い結果を証明しておこう．

任意の実数 α に対して，以下をすべて満たす関数 $f(x)$ が存在する．

(1) $f(x)$ は区間 $[0,1]$ で連続，
(2) すべての有理数 $q \in [0,1]$ に対し $f(q)$ は有理数，
(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \alpha$.

このことは「連続関数が有界閉区間で可積分である」という主張から「単調有界列の収束定理」が導かれることを意味している．

$\alpha \in [0,1)$ として一般性を失わない．$\{p_n\}_n$ を狭義単調増加な有理数列で，$p_0 = 0, \alpha - p_n < 2^{-2n}$ となるものとする．

$I_n = [a_n, b_n]$ を端点が有理数である縮小する区間列で，$I_0 = [0,1]$, $2^{-n-1} < b_n - a_n \leq 2^{-n}$, $\bigcap_n I_n = \beta \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ となるものとする．また，$n \geq 1$ に対し，

$$p_n - p_{n-1} = (a_n - a_{n-1})\cdot c_n/2 + (b_n - a_n)\cdot c_n + (b_{n-1} - b_n)\cdot c_n/2 \tag{2}$$

を満たすように有理数 $c_n > 0$ を定める．ここで，

$$\begin{aligned}((2)\text{ の左辺}) =& p_n - p_{n-1} < \alpha - p_{n-1} < 2^{-2n+2},\\ ((2)\text{ の右辺}) >& (b_{n-1} - a_{n-1})c_n/2 > 2^{-n-3}c_n\end{aligned}$$

であるから，$c_n < 2^{-n+5}$ である．

関数 $f(x)$ を $(a_n, \sum_{k=1}^n c_k)$, $(b_n, \sum_{k=1}^n c_k)$ を通る折線とする．$f(x)$ が $x \neq \beta$ の点で連続であることは明らかである．$f(\beta) = \sum_{k=1}^\infty c_k < \infty$ とすれば，$x = \beta$ でも連続になることを示そう．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - \beta| < \delta$ ならば，$[\beta - \delta, \beta + \delta] \subseteq I_m$ であり，$|f(x) - f(\beta)| \leq \sum_{k=m+1}^\infty c_k \leq 2^{-m+5}$ が成り立つ．よって，$f(x)$ は連続である．

任意の有理数 $p \in [0, 1]$ に対して，$(p, f(p))$ は折線上にあるので，$f(p)$ は有理数である．また，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx =& \sum_{n=1}^\infty (\sum_{k=1}^{n-1} c_k + \sum_{k=1}^n c_k)(a_n - a_{n-1})/2 + \sum_{n=1}^\infty (\sum_{k=1}^{n-1} c_k + \sum_{k=1}^n c_k)(b_{n-1} - b_n)/2\\ =& \sum_{n=1}^\infty (p_n - p_{n-1}) = \lim_n p_n = \alpha\end{aligned}$$

であるから，題意を満たす．