2019 年度明治大学理工学部「基礎微分積分 2」確認問題　　9 月 26 日 (木) 分

テーマ：言葉の定義

問題 1. (1) 恒等式と方程式の違いを説明せよ．

(2) 有理数の定義を答えよ．

(3) $p \Rightarrow q$ としたとき，p は q の $\boxed{}$ 条件であり，q は p の $\boxed{}$ 条件である．

(4) $P : p \Rightarrow q$ としたとき，$q \Rightarrow p$ は P の $\boxed{}$，$\neg p \Rightarrow \neg q$ は P の $\boxed{}$，$\neg q \Rightarrow \neg p$ は P の $\boxed{}$ である．ここで，$\neg p$ は p の否定を表す．

(5) 関数の定義を答えよ．

(6) 最大値と極大値の違いを説明せよ．

(7) 素数の定義を答えよ．

(8) 数学的帰納法とは何か説明せよ．

(9) 1 変数実数関数 $f(x)$ の導関数の定義を答えよ．

(10) 自然対数の底 e の定義を答えよ．

年　　　組　　　番　　名前:

テーマ：命題論理

問題 2. A, B, C は T または F の値をとる命題とする．次の命題は恒真か．恒真でない場合には，反例をあげよ．

(1) $A \wedge B \to A$

(2) $A \to (A \to A)$

(3) $\neg\neg A \to A$

(4) $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(5) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

(6) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(7) $(A \vee B \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C))$

(8) $(A \wedge B \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$

(9) $(A \to B \vee C) \to ((A \to B) \vee (A \to C))$

(10) $(A \to B \wedge C) \to ((A \to B) \wedge (A \to C))$

年 組 番 名前:

テーマ：述語論理

問題 3. 次の自然数の集合 A に関する論理式について，その否定を否定の記号 $(\neg)$ を使わずに論理式で書き直しなさい．

(1) $(\exists m)[m \in A \ \wedge \ p(m)]$. ただし $p(m)$ で「m が素数」を，$c(m)$ で「m は合成数」を表す．

(2) $(\forall m)[m \in A \Rightarrow e(m)]$. ただし $e(m)$ で「m は偶数」を，$o(m)$ で「m は奇数」を表す．

(3) $(\exists n)(\forall m)[n < m \Rightarrow m \in A]$

問題 4. 次の文の証明を与えよ．

(1) $(\exists m)(\forall n > m)[p(n) \Rightarrow o(n)]$ (注：$o(m)$ を $o(n)$ に訂正した)

(2) $(\forall m)(\exists n > m)p(n)$

年　　組　　番　　名前:

テーマ：収束・発散の意味

問題 5. 次の数列 $\{a_n\}$ について，$n \to \infty$ のとき $a_n \to \infty$ は成り立つか．証明とともに答えよ．

(1) $a_n = \sqrt{n}$

(2) $a_n = (-1)^n \cdot n$

(3) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

問題 6. 次の数列 $\{a_n\}$ について，$n \to \infty$ のとき $a_n \to \alpha$ を満たす α は存在するか．証明とともに答えよ．

(1) $a_n = \dfrac{n+1}{3n+1}$

(2) $a_n = (-1)^n$

年　　組　　番　名前:

テーマ：極限の性質

問題 7. $n \to \infty$ のとき $a_n \to 2$ であれば，$n \to \infty$ のとき $\sqrt{a_n} \to \sqrt{2}$ となることを示せ.

以下では，n は自然数を表し，$n \to \infty$ を省略して書いている.

問題 8. $\lim_n a_n = \alpha$, $\lim_n b_n = \beta$ のとき，$\lim_n a_n b_n = \alpha\beta$ であることを示せ.

年　組　番　名前:

テーマ：単調有界列の収束

問題 9. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく.

(1) すべての n で $a_n < 3$ であることを示せ.

(2) すべての n で $a_n < a_{n+1}$ であることを示せ.

問題 10. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ が収束することを示せ.

年　　組　　番　名前:

テーマ：区間縮小法の原理

問題 11. $\alpha = \lim_n a_n$, $\beta = \lim_n b_n$ とする.

(1) すべての n で $a_n \leq b_n$ であれば，$\alpha \leq \beta$ であることを示せ.

(2) すべての n で $a_n < b_n$ であっても $\alpha < \beta$ であるとは限らない．反例を挙げよ.

問題 12. (1) 単調有界列の原理を使って区間縮小法の原理を示せ.

(2) 単調有界列の原理を使ってアルキメデスの原理を示せ.

年　　組　　番　　名前:

テーマ：上下限に関する命題の証明

問題 13. (1) $\inf_n a_n = -\sup_n(-a_n)$ を示せ.

(2) $\sup_n(a_n + b_n) \leq \sup_n a_n + \sup_n b_n$ を示せ.

(3) (2) の式で $=$ が成り立たない例を挙げよ.

年　組　番　名前:

テーマ：コーシー列の収束の利用

問題 14. 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ を満たしているとする．$\{a_n\}$ が収束することを示せ.

年　　組　　番　　名前:

テーマ：e の性質

問題 15. n は自然数を，x, h は実数を動く変数として使う． $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とおく．

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ を求めよ．

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ を求めよ．

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}$ を求めよ．

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$ を求めよ．

年 組 番 名前:

テーマ：最大値の原理，平均値の定理

問題 16. すべての実数について $f(x) > 0$ で，$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ とする．このとき，$f(x)$ は最大値を持つことを示せ.

問題 17. $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続，開区間 (a, b) でその導関数 $f'(x)$ が $f'(x) > 0$ を満たすとする．このとき，$f(a) < f(b)$ であることを示せ.

年　　組　　番　　名前:

2019 年度明治大学理工学部「基礎微分積分 2」演習問題　　　　12 月 19 日 (木) 分

テーマ：積分の定義

問題 18. $f(x) = \exp(x)$ とおく.

(1) $n \in \mathbb{N}$ に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$ を計算し n の式で表せ.

(2) $I = \displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を計算せよ.

(3) $f(x)$ の原始関数を用いて $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ を計算し，I と一致することを確認せよ.