試験要項

- 試験日程：7 月 23 日 (月)
- 試験時間：10:50〜11:40，正答解説：11:40〜12:30
- 試験場：A303 番教室（授業と同じ場所）
- 受験資格：確率論 1 を履修していること
- 資料持ち込み不可
- 単位はこの期末試験 100% で判定する
- 試験結果の統計データは公開する
- 所持品，学生証の取扱，遅刻および途中退室，再試験などその他の事項は明治大学の定期試験に準ずる

出題範囲

- 確率変数
- 確率分布関数，密度関数，累積分布関数
- 期待値，分散
- ド・モアブル=ラプラスの定理
- 少数の法則
- 離散的確率過程
- 同時密度関数
- 特性関数，再帰性，中心極限定理
- ランダムウォーク

試験

問題 1. 以下の言葉の定義を書け．ただし，連続的確率変数は密度関数を持つ確率変数のことである．

(1) 連続的確率変数 X の密度関数
(2) 連続的確率変数 X の累積分布関数
(3) 連続的確率変数 X の期待値
(4) 確率変数 X の分散
(5) 確率変数 X の特性関数
(6) 確率分布の族が再帰性を持つ

問題 2. 以下の主張をこの主張を数学的に正確に記述せよ．

(1) ド・モアブル=ラプラスの定理（二項分布がある条件のもとでは正規分布で近似できる）
(2) 少数の法則（二項分布がある条件のもとではポアソン分布で近似できる）

問題 3. S_n を 1 次元ランダムウォークとする．すなわち，X_i を独立同分布の確率変数列で，$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ を満たすものとし，$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする．ここで，i および n は自然数とする．

(1) S_n の期待値および分散を求めよ．
(2) すべての $a \in \mathbb{R}$ に対し，$\lim_{n\to\infty} P(|S_n| \leq a\sqrt{n}) = \Phi(f(a)) - \Phi(-f(a))$ を満たすような関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を求めよ．ただし，Φ は標準正規分布の累積分布関数である．
(3) $x \in \mathbb{Z}$ に対し，$V_x = \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = x\}$ とおく．$a < 0 < b$ を満たす $a, b \in \mathbb{Z}$ に対し，$P(V_a < V_b)$ を求めよ．

問題 4. X, Y は独立で共に一様分布 $U(0, 1)$ に従う確率変数とする．確率変数 $Z = \frac{X}{\sqrt{Y}}$ の密度関数，期待値を求めよ．

解答

問題 1. 5 点 $\times 6$

(1) $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ を満たす非負関数 f のこと
(2) $F(x) = P(X \leq x)$ で定義される関数 F のこと
(3) X の密度関数 f に対して定義される実数値 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ のこと．ただし，$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$ のときに期待値は存在する
(4) 実数値 $V(X) = E((X - E(X))^2)$ のこと
(5) 関数 $\phi(s) = E(e^{isX})$ のこと
(6) 独立な確率変数 X, Y がその確率分布に従うときに，$X + Y$ もまたその確率分布に従うこと

問題 2. 10 点 $\times 2$

(1) $X_n \sim B(n,p)$ のとき，$Y_n = \frac{x-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ とすれば，$a < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，

$$\lim_n P(a < Y_n \leq b) = \int_a^b \varphi(x)dx$$

が成り立つ．ここで，$\varphi(x)$ は標準正規分布の密度関数である．

(2) $X_n \sim B(n, \lambda/n)$ のとき，任意の非負整数 k に対し，

$$\lim_n P(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

が成り立つ．

問題 3. 10 点 $\times 3$

(1) $E(X_i) = 0, V(X_i) = E(X_i^2) = 1$ より，$E(S_n) = 0, V(S_n) = n$.
(2) $Y_i = (X_i + 1)/2$ とすると，$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim B(n, 1/2)$ なので，

$$P(a < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i+1)/2 - n/2}{\sqrt{n \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \leq b) \to \int_a^b \varphi(x)dx$$

すなわち，

$$P(|S_n| \leq a\sqrt{n}) \to \int_{-a}^{a} \varphi(x)dx = \Phi(a) - \Phi(-a)$$

よって，$a \geq 0$ のとき $f(a) = a$，$a < 0$ のとき $f(a) = 0$.

(3) $k \in \mathbb{Z}$ から始めた場合の $P(V_a < V_b)$ を x_k とする．求めたいのは x_0 である．$x_a = 1$, $x_b = 0$，$x_k = \frac{1}{2}x_{k+1} + \frac{1}{2}x_{k-1}, a < k < b$ である．この式から $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}$ が得られるので，x_k は等差数列で，$x_k = \frac{b-k}{b-a}$．すなわち，$x_0 = \frac{b}{b-a}$.

問題 4. 20 点

$$P(Z \le z) = P(X \le z\sqrt{Y}) = P(Y \ge \frac{X^2}{z^2})$$

$z \le 0$ なら最初の値は 0 なので，$z > 0$ と仮定している．$z \le 1$ なら

$$P(Y \ge \frac{X^2}{z^2}) = \int_0^z (1 - \frac{x^2}{z^2})dx = z - \frac{z^3}{3z^2} = \frac{2z}{3}$$

$z > 1$ なら

$$P(Y \ge \frac{X^2}{z^2}) = \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{z^2})dx = 1 - \frac{1}{3z^2}$$

よって，Z の密度関数 f は，

$$f(z) = \begin{cases} 0 & (z \le 0) \\ \frac{2}{3} & (0 < z \le 1) \\ \frac{2}{3z^3} & (z > 1) \end{cases}$$

よって，

$$E(Z) = \int_0^1 x\frac{2}{3}dx + \int_1^\infty x\frac{2}{3x^3}dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}[-\frac{1}{x}]_1^\infty = 1$$

講評

問題 1. このような定義をきちんと書けるようにしましょう．

問題 2. (1) 講義では局所的ド・モアブル=ラプラスの定理しかやらなかったので，そちらを書いた人が多かった．その場合，5 点とした．

(2) $np = \lambda$ などの条件をきちんと書きましょう．

問題 3. (1) よくできていた．

(2) 中心極限定理が頭にあれば自明だった．もう少しひねるべきだった．

(3) ここまで手が回らなかったよう．

問題 4. よくできていた．