2018 年度明治大学理工学部「関数論 1」「関数論 1 演習」第 2 回中間試験　　担当：宮部賢志

- 試験日程：6 月 20 日 (水)1 限後半および 2 限，試験時間は 60 分，その後正答解説
- 出題範囲：教科書『複素関数入門』(チャーチル，ブラウン) の 1 から 3 章
- 教科書・ノート持ち込み及び閲覧可
- 単位判定には使用しないが，試験結果の統計データは公開する

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと.

問題 1. $\sin z = 1$ となる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

問題 2. i^z のすべての値が実数となる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

問題 3. 複素関数 $f(z)$ が $z = w$ で複素微分可能であることの定義を書け.

問題 4. 複素関数 $f(z) = e^z \sin z$ に対し，f の 4 回複素微分 $f^{(4)}(z)$ を求めよ.

問題 5. 複素関数 $f(z) = \overline{z}^2 + z + \overline{z}$ が複素微分可能な点をすべて求めよ.

問題 6. $x, y \in \mathbb{R}$ に対し，複素関数 $f(x+iy) = \sqrt{|x||y|}$ が複素微分可能な点をすべて求めよ.

問題 7. $(x, y) = (0, 0)$ を除くすべての実数 $x, y \in \mathbb{R}$ で $\mathrm{Re} f(x+iy) = \frac{x}{x^2+y^2}$ を満たす，$z \neq 0$ で正則な複素関数 $f(z)$ をすべて求めよ.

問題 8. $z \neq 0$ となるすべての $z \in \mathbb{C}$ で $|f(z)| = \frac{1}{|z|}$ を満たす，$z \neq 0$ で正則な複素関数 $f(z)$ をすべて求めよ.

問題 9. 領域 D で正則な関数 $f(z)$ に対して，複素関数 $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ は正則で，その微分 $g'(z)$ は $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ となることを示せ.

問題 10. 有界な閉集合 R で連続な複素関数 $f(z)$ は，R で一様連続となることを示せ.

解答　　配点：1 問 10 点，合計 100 点

問題 1. $\arcsin(x) = -i\log(ix + \sqrt{1-x^2})$ より，$z = \arcsin(1) = -i\log(i) = -i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$. (別解) $z = x + iy$ とおけば $\sin z = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$ である．$\sin z = 1$ より $\cos x = 0$ または $\sinh y = 0$. $\sinh y \neq 0$ ならば $\cos x = 0$ と $\cosh y > 0$ より $\sin x = 1$ なので $\cosh y = 1$．これは $y = 0$ すなわち $\sinh y = 0$ を意味して矛盾．$\sinh y = 0$ より $y = 0$ で $\cosh y = 1$，$\sin x = 1$ から，$z = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $(n \in \mathbb{Z})$.

問題 2. $z = x + iy$ とおけば，$i^z = \exp(z\log i) = \exp((x+iy)(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i) = \exp(-y(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) + x(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)i)$. これらすべてが実数になるのは，$n$ に関わらず $x(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ が π の整数倍になるとき．少なくとも $n = 0$ で π の整数倍にならなければならないので，x は偶数．逆にそのとき，これらは π の整数倍になる．すなわち，i^z のすべての値が実数になるのは $\mathrm{Re}(z)$ が偶数のとき．

問題 3. 極限値 $\lim_{h\to 0} \frac{f(w+h)-f(w)}{h}$ が存在すること．$\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ など同値なものでも良い．

問題 4. $f'(z) = e^z\sin z + e^z\cos z$, $f''(z) = e^z\sin z + 2e^z\cos z - e^z\sin z = 2e^z\cos z$, $f^{(3)}(z) = 2e^z\cos z - 2e^z\sin z$, $f^{(4)}(z) = 2e^z\cos z - 4e^z\sin z - 2e^z\cos z = -4e^z\sin z$.

問題 5. $f(x+iy) = (x-iy)^2 + 2x = x^2 - y^2 + 2x - 2xyi$ より，$u_x = 2x+2$, $v_x = -2y$, $u_y = -2y$, $v_y = -2x$. CR 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ が成立するのは $x = -1/2, y = 0$ で，この点以外では微分不可能．この点の近傍で偏導関数は存在し，この点で連続なので，この点では微分可能．よって微分可能な点は $(x,y) = (-1/2, 0)$ のみ．

問題 6. $x > 0$ かつ $y > 0$ の場合，$f(x+iy) = \sqrt{xy}$ なので，$u_x = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}$, $u_y = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}$，$v_x = v_y = 0$ で，CR は不成立．$x = 0$, $y > 0$ の場合，u_x が存在しないので，CR は不成立．$(x,y) = (0,0)$ の場合，$h = re^{i\theta}$ とおくと，$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{|\cos\theta\sin\theta|}}{\cos\theta + i\sin\theta}$. この値は $\theta = 0$ のとき 0 だが，$\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき 0 でない．θ に依存するので，原点でも微分可能ではない．他の場合も同様にして，すべての点で微分可能ではない．

問題 7. $f = u + iv$ とすると，$u = \frac{x}{x^2+y^2}$ より $u_x = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$. CR より $v_y = u_x$ なので u_x を y で積分して $v = \frac{-y}{x^2+y^2} + g(x)$. また $v_x = -u_y$ なので $-u_y$ を x で積分して $v = \frac{-y}{x^2+y^2} + h(y)$. よって実定数 c で，$v = \frac{-y}{x^2+y^2} + c$ と書け，$f = \frac{x-yi}{x^2+y^2} + ci = \frac{1}{z} + ci$.

問題 8. $g(z) = zf(z)$ とおくと，g は $z \neq 0$ で正則かつ $|g| = 1$ なので，$|c| = 1$ となる複素定数 c に対して $g = c$ とかける．よって，$f = \frac{c}{z}$.

問題 9. $\frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z}+\overline{h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z}+\overline{h})-f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} \to \overline{f'(\overline{z})}$

問題 10. f が R で一様連続でないとすると，ある $\epsilon > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $x, y \in R$ が存在して，$|x-y| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$ が成り立つ．それらを $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ とおく．R が有界であることから，ボルツァーノ＝ワイエルシュトラスの定理より収束する部分列を含む．よって，$\{x_n\}$ がある点 w に収束するようにとることができる．すべての $n \in \mathbb{N}$ で $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ であることから，$\{y_n\}$ も w に収束する．また，R が閉集合であることから，$w \in R$ である．f は w で連続であることから，上で定めた ϵ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$0 < |w-x| < \frac{1}{N}$ となるすべての $x \in R$ で $|f(w) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は w に収束するので，この N に対し，ある $M \in \mathbb{N}$ が存在して，$|x_M - w| < \frac{1}{N}$ かつ $|y_M - w| < \frac{1}{N}$. このとき $|f(x_M) - f(y_M)| \leq |f(x_M) - f(w)| + |f(w) - f(y_M)| < \epsilon$ より矛盾．

講評

　途中式をきちんと書きましょう．

「理解はしていて，方針はあっているが，計算ミスをしている」というのが多い．どこをどのように間違えたのか原因を究明すること．

問題 1. 方針としてはいろいろあり得る．arcsin の公式を使う．$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ の定義から 2 次方程式を解いて e^{iz} を求める．$x+iy$ と置いて無理やり求める．どれを使っても良い．

　$AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$ で計算を続ける．

問題 2. 「z が虚数」という解答が多い．「実部が偶数」に含まれているので，十分条件ではあるが，必要条件ではない．

問題 3. 「CR の逆」を書いている人がいるが，これは定理である．しかも同値にはならない．定義は「その言葉をどういう意味で使うのか」ということで，定理は「ある条件がなりたつとき，このような結論が成り立つ」という主張．

　「導関数の定義」を書いている人がいる．聞かれているのは「微分可能であることの定義」である．

問題 4. 計算するだけの問題．よくできていた．

問題 5. CR を使って調べる．計算ミスが目立った．

問題 6. $x=0, y>0$ のときの x での偏微分は，x を動かすので $x \neq 0$ のところとの比較になる．

問題 7. $+c$ を忘れないように．

　極座標の CR を使っても良い．その方が計算は楽だろう．

問題 8. $g(z) = zf(z)$ と置く発想は難しかったらしい．

問題 9. CR は使えない．正則であることを示す必要があるので．

問題 10. 要精進．