2018 年度明治大学理工学部「関数論 1」「関数論 1 演習」中間試験　　担当：宮部賢志

- 試験日程：5 月 16 日 (水)2 限，試験時間は 60 分，その後正答解説
- 出題範囲：教科書『複素関数入門』(チャーチル，ブラウン) の 1,3 章
- 教科書・ノート持ち込み及び閲覧可
- 単位判定には使用しないが，試験結果の統計データは公開する

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．

問題 1. $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，z^{100} を求めよ．

問題 2. $z^3 = -8i$ となる z をすべて求めよ．

問題 3. $a_0, a_1, \cdots, a_n$ を実数とする．z が $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ の解であるとき，$\overline{z}$ も $f(x) = 0$ の解となることを示せ．

問題 4. $\exp(i\overline{z}) = -\overline{\exp(z)}$ を満たす z をすべて求めよ．

問題 5. $\cos(z) = \cosh(4)$ を満たす z をすべて求めよ．

問題 6. $\mathrm{Log}(z) = \frac{\pi}{4}i$ を満たす z をすべて求めよ．

問題 7. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2i}{\pi}}$ を計算せよ．

問題 8. $|\alpha| < 1$ を満たす複素数 α に対し，$f(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}$ とおく．

(1) $|z| < 1$ ならば $|f(z)| < 1$ を示せ．
(2) $f \circ f(z) = z$ を示せ．

問題 9. 複素数の集合 S と複素数 z に関して，「z が S の境界点である」ならば「z が S の集積点または S の孤立点である」ことを示せ．ただし，z が S の孤立点とは，$z \in S$ で，z の近傍で z 以外の S の点を含まないものが存在することをいう．

問題 10. $z = x + iy$ とする．

(1) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ を使って，$\lim_{n\to\infty} n \ln|1 + \frac{z}{n}| = x$ を示せ．
(2) $\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ を使って，$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Arg}(1 + \frac{z}{n}) = y$ を示せ．
(3) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$ を示せ．

解答

1 問 10 点，合計 100 点

問題 1. z を極形式にすると $z = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$．$\frac{2}{3}\pi \times 100 = 33\cdot 2\pi + \frac{2}{3}\pi$ なので，$z^{100} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. (別解)$z^3 = 1$ より，$z^{100} = (z^3)^{33}z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$.

問題 2. $z = 2(\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{2n\pi}{3}))$，$n = 0, 1, 2$．$n = 0$ のときは $z = 2i$．$n = 1$ のときは $\frac{7}{6}\pi$ より $z = -\sqrt{3} - i$. $n = 2$ のときは $\frac{11}{6}\pi$ より $z = \sqrt{3} - i$.

問題 3. $f(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = \overline{a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = 0.$

問題 4. $z = x + iy$ とおくと，(左辺) $= e^y(\cos x + i\sin x)$，(右辺) $= e^x(\cos(\pi - y) + i\sin(\pi - y))$. これより，$x = y$，$x = \pi - y + 2n\pi$ なので，$z = (1+i)(n + \frac{1}{2})\pi$($n$ は整数).

問題 5. $z = x + iy$ とおく．$\cosh(4) > 1$ より $y \neq 0$. $\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = \cosh(4)$．右辺は実数で，$y \neq 0$ より，$\sin x = 0$．右辺は正で，$\cosh y > 0$ なので，$\cos x = 1$．$y = \pm 4$．よって，$z = 2n\pi \pm 4i$ (n は整数).

問題 6. $z = re^{i\theta}$ とすると，$\mathrm{Log}(z) = \ln r + i\theta$ より，$r = 1, \theta = \frac{\pi}{4}$．よって，$z = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

問題 7. 求めるのは $\exp(\frac{2i}{\pi}\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}}))$ である．$\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \log(e^{\frac{\pi}{4}i}) = \left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)i$ で，$\frac{2i}{\pi}\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2} - 4n$．よって，$\exp(\frac{2i}{\pi}\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})) = e^{-\frac{1}{2}-4n}$ (n は整数)

問題 8.

$$|f(z)|^2 < 1 \iff \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}\cdot\frac{\overline{\alpha} - \overline{z}}{1 - \alpha\overline{z}} < 1 \iff |\alpha|^2 - \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |z|^2 < 1 - \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2|z|^2$$
$$\iff (1 - |\alpha|^2)(1 - |z|^2) > 0$$

$$f\circ f(z) = \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}}{1 - \overline{\alpha}\frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z}} = \frac{\alpha(1 - \overline{\alpha}z) - (\alpha - z)}{1 - \overline{\alpha}z - \overline{\alpha}(\alpha - z)} = \frac{(1 - |\alpha|^2)z}{1 - |\alpha|^2} = z$$

問題 9. z を S の境界点だが，集積点ではないとする．集積点ではないことから，ある z の近傍 U で z と異なる S の点を 1 つも含まないものが存在する．$z \notin S$ ならば，z は S の外点となり，境界点であることに反する．よって，$z \in S$ であり，z は S の孤立点であることが分かる．

問題 10. (1) $|1 + \frac{z}{n}|^2 = (1 + \frac{x}{n})^2 + (\frac{y}{n})^2 = 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2}$ より，

$$n\ln|1 + \frac{z}{n}| = \frac{n}{2}\ln|1 + \frac{z}{n}|^2 = \frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2} - \frac{1}{2}(\frac{2x}{n} + \frac{x^2+y^2}{n^2})^2 + \cdots\right) \to x$$

(2) $1 + \frac{z}{n} = \frac{n+x}{n} + \frac{y}{n}i$ より，

$$n\mathrm{Arg}(1 + \frac{z}{n}) = n\mathrm{Arctan}\frac{y}{n+x} = n\left(\frac{y}{n+x} - \frac{y^3}{3(n+x)^3} + \cdots\right) \to y$$

(3)

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp\left(n\log(1 + \frac{z}{n})\right) = \exp(n\ln|1 + \frac{z}{n}| + in\mathrm{Arg}(1 + \frac{z}{n})) \to \exp(x + iy) = e^z$$

講評

指示には従うこと．表だけに記入する，上下 3cm ずつ空ける，何枚中の何枚目かを記入するなど．

A4 用紙を縦に使うようにとハッキリは指示しなかった．迷ったら聞いてほしい．

字は大きくハッキリ書くこと．小さい字で書いているために計算ミスをしていることがある．

どう変形しているのかが読んで分かるように．「$A = B$ の式から両辺共役複素数を取って $\overline{A} = \overline{B}$，それゆえ...」などと書く．「$A = B$ なので，$\overline{A} = ... = ... = \overline{B}$」などと書かれていると，突然 $\overline{B}$ が出てくることになり，なぜ最後の等号が成り立つのか分かりにくい．

問 1 から問 7 までは基本的な計算問題として出題した．まずは定義に基いて計算することができるようになろう．

問 8 から問 10 までは余力のある人向けの演習問題である．

問題 1. 100 回の計算をしようとした人はいなかった．ほとんどの人がド・モアブルの定理を使っていた．

計算ミスが目立った．気をつけよう．

$\cos\frac{200\pi}{3} + i\sin\frac{200\pi}{3}$ や $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ の形で終わっている人もいた．単に「求めよ」と言われた場合には，できるだけ簡単な形にして解答する．cos や sin は関数であり，しかもこの場合は簡単に求まるので，計算すべきだろう．

問題 2. $z = re^{i\theta}$ もしくは $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を置いて計算する．この場合，$r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$(もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$) の条件を書くのが丁寧だが，書かなくてもその条件を課していると理解するのが普通だろう．「$r^3 = -8$, $e^{3i\theta} = i$」という式が出てくるのは，この条件に反する．

$z^3 = -8i = 2^3(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)$ より，$z = 2(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi)^{1/3} = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ という計算をしている人もいたが，このような計算はできない．

$\cos, \sin$ が残ったままの解答では不十分．

問題 3. 共役を取った人は満点を取れた．気がつくことができるかどうかだろう．

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおいて，$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ として，実部と虚部が 0 という式から，$\overline{z}^k = r^k(\cos k\theta - i\sin k\theta)$ についても解である，という方針で示した人もいた．これでも良い．

問題 4. $z = x + iy$ と置いて計算をした後，実部と虚部の比較をする人もいた．計算量が多く，分母が 0 の場合分けをしたりして，大変．

「絶対値と偏角がそれぞれ等しい」とした場合，式は 2 つ出て来る．途中で式が 1 つになって同値関係が崩れている人がいた．

問題 5. $y \neq 0$ の理由をきちんと説明すべき．

「z は実数ではない」は「$z \notin \mathbb{R}$」と書く．「$z \neq$ 実数」と書いた時には，「z と実数は等しくない」という意味になるが，この「実数」が何を指しているのか不明．

$\cosh y = \cosh 4$ から $y = 4$ とする人もいた．グラフを思い浮かべれば，解は 2 つあることに気がつくはず．

e^{iz} を求めて計算する人もいた．これでも良い．

$\cosh(iw) = \cos(w)$ を利用する人もいた．この場合，$\cos z = \cos w \iff z = \pm w + 2n\pi i$ を使う

ことになる．この証明は和積の公式などでできる．

問題 6. $e^{\frac{\pi i}{4}}$ のままでは不十分．

問題 7. $(e^{\frac{\pi i}{4}})^{\frac{2i}{\pi}} = e^{\frac{\pi i}{4}\cdot\frac{2i}{\pi}}$ という計算はできない．$\frac{\pi i}{4} + 2n\pi i$ とすれば，形式的に同じ答えが出てくるが，なぜそのようにして良いのかの説明がなければ，不十分．

問題 8. (1) $\alpha\overline{\alpha} > 1$ には意味があるが，$\overline{\alpha} > \frac{1}{\alpha}$ とは書けない．

分母分子に何かをかけるときには 0 でないことを確認する．

「$|f(z)| \geq 1$ を仮定して矛盾を導く」という方針でも間違いではない．しかし，不必要な背理法はできるだけ避けるべき．

(2) ただ計算するだけ．分母や分子に分数が表れる場合には，分母分子に同じものをかけて分数を解消する．ただし，0 でないことに注意する．

問題 9. 難しかったよう．

問題 10. この無限級数が複素数でも成り立つかどうかはまだ話していない．

$\left(\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n/t}\right)^t \to e^t$ は実数列としては成り立つ．この t が z に変わった場合に成り立つかどうかは別の議論が必要である．