試験要項

- 試験日程：7 月 18 日 (水)
- 試験 A 試験時間：9:00〜9:50，試験 A 正答解説：9:50〜10:40
- 試験 B 試験時間：10:50〜11:40，試験 B 正答解説：11:40〜12:30
- 試験場：5303 番教室（授業と同じ場所）
- 受験資格：関数論 1 および関数論 1 演習を履修していること
- 試験 A：計算問題（導出過程も含めて採点する）
- 試験 B：定義の記述，証明問題
- 資料持ち込み不可
- 単位はこの期末試験 100% で判定する
- 試験結果の統計データは公開する
- 所持品，学生証の取扱，遅刻および途中退室，再試験などその他の事項は明治大学の定期試験に準ずる

試験 A では以下の点を見る．

- 複素数の四則演算，絶対値や共役の計算，複素平面，方程式を解く，ド・モアブルの公式
- $\exp, \sin, \cos, \tan, \log$ や複素指数関数の計算
- 複素微分の計算
- コーシー・リーマンの関係式の利用
- 線積分の計算 (パラメタ表示，原始関数の利用)

試験 B では以下の点や試験 A の範囲の応用力を見る．

- 極限，連続，複素微分，正則，複素関数の線積分などの定義を理解しているか
- コーシー・リーマンの関係式の証明およびその利用
- 初等関数の性質および導関数の導出

試験 A

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．$\mathbb{R}$ は実数の集合を，$\mathbb{C}$ は複素数の集合を表す．虚数単位として i を使う．$x \in \mathbb{R}$ に対し $\ln(x)$ で x の自然対数を表す．$z \in \mathbb{C}$ に対し $\log z = \ln|z| + i \arg z$ と定義する．$\log z$ の定義において $-\pi < \arg z \leq \pi$ に制限した主値を $\mathrm{Log} z$ で表す．

問題 1. $z^3 = 2\sqrt{2}i$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，それぞれを $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 2. $e^{i\pi}$ はいくつか．できるだけ簡単な形で書け．

問題 3. $(-i)^{(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\pi} i)}$ の主値を求め，$a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 4. $\cos z = \frac{e + e^{-1}}{2}$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，それぞれを $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 5. $f(z) = \dfrac{z + i}{z - i}$ を複素微分せよ．

問題 6. $f(z) = z\mathrm{Log} z$ を複素微分せよ．

問題 7. $f(z) = \overline{z}^2 + \overline{z}$ が複素微分可能な点をすべて求めよ．

問題 8. すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対し $\mathrm{Re} f(x + iy) = 2xy$，$f(0) = 0$ を満たす整関数 $f(z)$ を求め，z の式で表わせ．

問題 9. C を 0 から $1 + i$ までの線分として，線積分 $\displaystyle\int_C z^2 dz$ を求めよ．

問題 10. C を $|z| = 1$ の円を正の向きに 1 回転する曲線として，線積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ を求めよ．

解答

1 問 10 点，合計 100 点

問題 1. $z = re^{i\theta}$ とおくと，$z^3 = r^3 e^{3i\theta}$, $2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$ より，$r^3 = 2\sqrt{2}$, $3\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ なので，$r = \sqrt{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}n\pi$. $n = 0, 1, 2$ に対応して，$z = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$, $\sqrt{2}(-i)$ で，$z = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\sqrt{2}i$.

問題 2. $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

問題 3. $-i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ より $\log(-i)$ の主値は $-\frac{\pi}{2}i$. よって，$(-i)^{(\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\pi}i)} = \exp((\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{\pi}i) \cdot (-\frac{\pi}{2}i)) = \exp(-\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}i) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

問題 4. $\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos(iy) - \sin x\sin(iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$ これが $\cosh 1$ に等しい. $\cosh 1 > 1$ より z は実数でないから $y \neq 0$. よって $\sin x = 0$ より $\cos x = \pm 1$. $\cosh y > 0$ より $\cos x = 1$ および $\cosh y = \cosh 1$. これから，$x = 2n\pi$, $y = \pm 1$. よって $z = 2n\pi \pm i$, $n \in \mathbb{Z}$.

問題 5. $f' = \frac{z-i-(z+i)}{(z-i)^2} = \frac{-2i}{(z-i)^2}$

問題 6. $f' = z\frac{1}{z} + \mathrm{Log} z = \mathrm{Log} z + 1$

問題 7. $f(x+iy) = (x-iy)^2 + (x-iy) = x^2 - y^2 + x + i(-2xy - y) = u + iv$. $u_x = 2x + 1$, $u_y = -2y$, $v_x = -2y$, $v_y = -2x - 1$. CR 方程式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ を解いて，$x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$. この点の近傍で偏導関数は存在し，この点で連続なので，CR の逆よりこの点で f は微分可能. よって，微分可能な点は $z = -\frac{1}{2}$ のみ.

問題 8. $f = u + iv$ とすると $u(x, y) = 2xy$ より $u_x = 2y$, $u_y = 2x$. f は全平面で微分可能なので CR 関係式 $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ より，$v_y = 2y$, $v_x = -2x$. よって，$v = y^2 - x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. $f(0) = 0$ より $c = 0$. これより $f = 2xy + (y^2 - x^2)i = -ix(x+iy) + xy + y^2 i = (x+iy)(-ix+y) = -iz^2$.

問題 9. 曲線 C を $z(t) = (1+i)t$, 0 としてパラメータを取ると，$\frac{dz}{dt} = 1 + i$ より，

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (1+i)^2 t^2 (1+i) dt = \frac{1}{3}(1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

(別解) 被積分関数は全平面で正則なので，$\int_C z^2 dz = [\frac{1}{3}z^3]_0^{1+i} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$.

問題 10. 曲線 C を $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ としてパラメータを取ると，$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ より，

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} i e^{i\theta} d\theta = 2\pi i$$

講評

問題 1. $\sin, \cos$ が残っている人もいた．すぐに計算できる形なので，計算しよう．正しければ 5 点とした．

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ のような形のままの人もいた．何がきれいな形と思うかは人それぞれだが，私の感覚では微妙．減点はしなかった．

問題 2. よくできていた．

問題 3. 主値としてどの範囲をとるかは文脈によって異なる．今回の場合，最初に $-\pi$ から π と書いてあるので，それに従う．主値を $\frac{3}{2}\pi$ として計算した場合は 5 点とした．

$e^{\ln 2} = 2$ の計算ができない人も多かった．適宜部分点とした．

問題 4. 係数比較をして答えを出そうとした人が多い．こちらでは正しい答えが出てこないので，0 点とした．

$y = \pm 1$ を $y = 1$ とした場合は，ケアレスミスとして 5 点とした．

問題 5. 商の微分の公式を間違って覚えているように見える人がいた．

問題 6. Log と主値なので，値が決まっていて，連続で，微分可能である．よって，その導関数も値が決まるので，Log で書くことができる．ここで log を使うと，多価のように見える．その場合は 5 点とした．

問題 7. 偏導関数を求めることができて，そこからの計算を間違えた場合は 5 点．

答え方としては「$z = -1/2$」などが良いと思う．$(x, y) = (-1/2, 0)$ でも間違いではないが適切ではないと思う．減点はしなかった．

問題 8. x, y の式で表すところまでで 5 点．

問題 9. $\frac{(1+i)^3}{3}$ の形は簡単に計算できるので計算してほしい．値としては正しいので，8 点とした．

問題 10. $z = 0$ という定義されない部分が C の内部に含まれるのでコーシー・グルサの定理は使えない．

重要な積分なので答えを覚えていた人もあるだろうが，途中式は必要．適宜部分点とした．

$z = e^{i\theta}$ として，$z' = ie^{i\theta}$ である．θ での微分であることに注意．

試験 B

解答の導出過程も含めて丁寧に書くこと．$\mathbb{C}$ は複素数の集合を表す．

問題 1. 複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対して，$\lim_{z\to z_0} f(z)=\alpha$ であることの定義を書け．

問題 2. 複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に関して，$f(z)$ が $z=w$ で複素微分可能であることの定義を書け．

問題 3. 複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は点 z で微分可能であるとき，その点でコーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann equations) が成り立つことの証明を書け．

問題 4. 複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ が複素全平面で正則でかつ $|f(z)|=1$ を満たすとする．このとき，$f(z)$ としてあり得る関数をすべて求めよ．

問題 5. $z\in\mathbb{C}$ に対する e^z の定義を述べよ．またその定義のもとで関数 $f(z)=e^z$ が微分可能であることを示し，その導関数 $f'(z)$ が $f'(z)=e^z$ となることを示せ．

問題 6. $\displaystyle\int_0^\infty te^{-zt}dt$ が収束する $z\in\mathbb{C}$ の範囲を求め，その時の極限値を求めよ．

解答

問 1,2 は 10 点 $\times 2$，問 3,4,5,6 は 20 点 $\times 4$．合計 100 点

問題 1． 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対し，$0 < |z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - \alpha| < \epsilon$.

問題 2． $\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ が存在すること．

問題 3． $f = u + iv$ とおく．$z = x + iy$ で微分可能なので，$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ が $h \to 0$, $h \in \mathbb{C}$ で収束する．h を実数の範囲で $h \to 0$ とすれば，$\frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y)-u(x,y)-iv(x,y)}{h} \to u_x + iv_x$．$h = iw$ として w を実数の範囲で $w \to 0$ とすれば，$\frac{u(x,y+w)+iv(x,y+w)-u(x,y)-v(x,y)}{iw} \to v_y - iu_y$．これらが等しいことから，$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$．これがコーシーリーマンの関係式である．

問題 4． $f = u + iv$ とすると，$u^2 + v^2 = 1$．これを x, y で偏微分すると，$uu_x + vv_x = 0$, $uu_y + vv_y = 0$．f は正則なので，コーシーリーマンの関係式より，$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$．v_x, v_y を消去することで，$uu_x - vu_y = 0$, $uu_y + vu_x = 0$．さらに u_y を消去すると，$(u^2 + v^2)u_x = 0$. $u^2 + v^2 = 1$ より $u_x = 0$．これより，$u_y = v_x = v_y = 0$．一次偏導関数がすべて 0 であることから f は定数．$|f| = 1$ より，$|c| = 1$ となる複素数 $c \in \mathbb{C}$ に対し，$f = c$ となる．

問題 5． $z = x+iy$ に対し $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ で定義する．$e^z = u+iv$ とおくと，$u_x = e^x \cos y$, $u_y = -e^x \sin y$, $v_x = e^x \sin y$, $v_y = e^x \cos y$ より，コーシーリーマンの関係式が成り立つ．さらに，どの点でもその近傍で導関数が存在し，その点で連続となる．よって，コーシーリーマンの定理の逆より e^z は微分可能である．これより，$f' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

問題 6． $z = 0$ であれば，被積分関数が t なので，収束しない．$z \neq 0$ とする．

$$\int te^{-zt}dt = -\frac{1}{z}te^{-zt} - \int (-\frac{1}{z})e^{-zt}dt = -\frac{1}{z}te^{-zt} - \frac{1}{z^2}e^{-zt}$$

$z = x + iy$ とおくと $e^{-zt} = e^{-xt}e^{-iyt}$．$t \to \infty$ でこれが収束するのは $x > 0$ の範囲．$t \to \infty$ では 0 に収束する．$t = 0$ では第二項だけが残って $-\frac{1}{z^2}$．よって，極限値は $\frac{1}{z^2}$.

講評

問題 1. 「$0 < |z - z_0| < \delta$ ならば $|f(z) - \alpha| < \epsilon$」において，「$0 <$」が抜けている人がいた．最初の解答もそうなっていたが，$z = z_0$ の場合を除かなければいけない．このミスだけの場合は 8 点

問題 2. 「存在すること」まで書きましょう．

問題 3. よくできていた．

$\Delta x \to 0$ の場合と，$\Delta y \to 0$ の場合で，一致するというのがこの証明の鍵であり，その部分の説明がなければ減点．

問題 4. $f = e^{i\theta}$ という答えがあった．$z = re^{i\theta}$ とおいているなら，この f は正則ではない．ある定数 θ について，$f = e^{i\theta}$ となるというのは正しい．理由がきちんと説明されていなければ，適宜減点した．

問題 5. 定義を書けという問題なので，定義を書けば良い．「〜が成り立つ」という表現は，定義を述べるときには不適切．$e^z = ... = ...$ などと複数の式が書いてあるのも，どれが定義なのか分からない．好意的に解釈して，$e^x(\cos y + i \sin y)$ が書かれていれば 5 点とした．

e^z が微分可能であることを示す部分で 10 点．CR の逆を使うのが一番自然だろう．直接証明している人もいたが，大変だと思う．$\Delta x \to 0$ と $\Delta y \to 0$ の場合が一致するだけでは不十分．$h \to 0$ と書いてあり h が複素数なら正しいが，h を実数と思って計算している人もいた．

$f' = e^z$ が計算してあれば 5 点．

問題 6. 不定積分もしくは定積分の計算ができて 5 点．収束の判定で 10 点．極限値で 5 点．

z は複素数なので，$z > 0$ という表記は意味を持たない．