2018 年度「解析学展望 1」レポート課題　　担当：宮部賢志

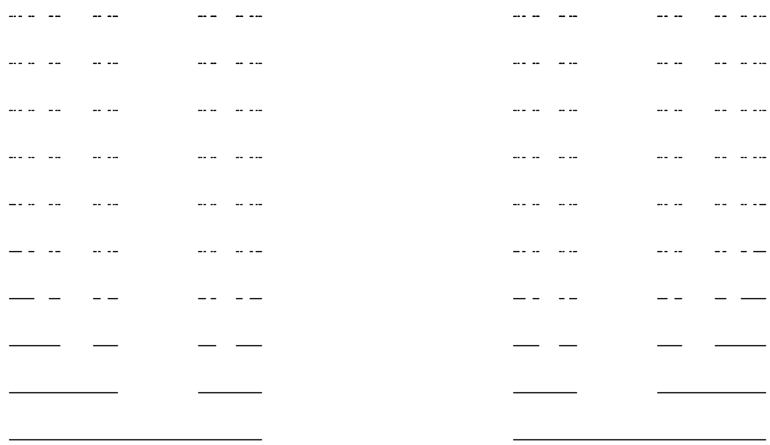
提出方法等はすでに指示されているものに準ずる．

問題 1. $S_1,\ S_2:[0,1]\to[0,1]$ を，

$$S_1(x) = \frac{x}{2+x},$$
$$S_2(x) = \frac{2}{2+x}$$

により定める．この反復関数系のアトラクター F のハウスドルフ次元の良い近似を与えよ．

この反復関数系の近似集合は以下のようになる．



注意.

(1) この問は"Fractal Geometry"(Kenneth Falconer) の章末問題 9.10 である．

(2) $\mathbb{R}$ の部分集合なのだから，次元が 0 から 1 の間にあるのはすぐ分かる．少なくともこれよりも良い近似をせよ．

(3) 計算には Wolfram Alpha やプログラムなどを使用しても良い．その場合には入力した数式またはソースコードとその結果を添付すること．

講評．

講義でほぼ同じ問題を解いている．ほぼ全員が同じ解き方で解答にたどり着いていた．

工夫の余地があるのは，どのように計算機を利用して手間を減らすかという部分で，ここには大きな差が出た．

最高で 5 回の反復を手計算で行い，ほぼ正しい結果を得ている人がいて，感服した．手計算では 2 回くらいが限度で，それ以上は計算機を使うと思っていた．

計算機を使う場合でも，その使い方もいろいろだった．最後の方程式の解を求めるところだけを，Wolfram Alpha を使って解いた人が多かった．一方，関数の合成や微分を Mathematica にやらせて，3,4 回の反復を計算した人もいた．

有効数字 5 桁ほどで，

(1) 2 回の反復，0.5262347，0.8027327
(2) 3 回，0.55597，0.7423265
(3) 4 回，0.573072，0.7132166
(4) 5 回，0.5841712，0.6962902
(5) 10 回，0.6082195，0.6641879
(6) 15 回，0.6168047，0.6541242
(7) 20 回，0.6212402，0.6491753

などの結果が得られる．利用した R のソースコードは別途ウェブページからダウンロードできる．

合成関数の微分は各関数の微分と値が分かれば計算できる．sup や inf も，各縮小写像が単調であることから，端で最大最小を取る．よって，合成関数を代数的に計算する必要はなく，関数を作って 0 と 1 を入力して数値的に計算して最大最小を見れば求まる．最後の方程式の解を求めるところは近似的な計算をすればよい．

ところで，上の収束はかなり遅い．合成関数の対称性を使うなどして，収束を速くすることはできないだろうか．現在何が知られているかも寡聞にして知らない．興味のある人は調べてみてほしい．