$D \subseteq \mathbb{R}^n$
閉

連続.

$S: D \to D$ が contraction とは.

$\exists r \in (0,1)$ $|S(x)-S(y)| \leq r|x-y|$ $(x, y \in D)$

$=$ が成立するなら contracting similarity と呼ぶ

$\{S_1, \cdots, S_m\}$ が IFS とは. 有限個の contraction

そのアトラクター(不変集合)を $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$

を満たす空でないコンパクト集合として定義する

これが存在して一意であることを示す.

$A_\delta = \{x \in D :\ |x-a| \leq \delta$ となる $a \in A$ がある$\}$

$d(A,B) = \inf\{\delta_{>0} ;\ A \subset B_\delta$ かつ $B \subset A_\delta\}$

空でないコンパクト集合の族に対して、

d は距離となる。

ハウスドルフ距離と呼ばれる。

(i) $d(A,B) \geq 0$

$d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$

$\because$ $\Leftarrow$ は明らか

($\Rightarrow$) $x \in A$ なら任意の $\delta > 0$ で、$x \in B_\delta$

B は閉なので、これは $x \in B$ を意味する

(ii) $d(A,B) = d(B,A)$

(iii) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

$\because$ $A \subset C_{\delta_1}$ かつ $C \subset B_{\delta_2}$ なら $A \subset B_{\delta_1+\delta_2}$

Thm 9.1

$\{S_1, \cdots, S_m\}$: IFS on D 閉集合, r_i : ratio < 1

アトラクターが唯一存在　　$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E)$

(:) (唯一性)

A, B : 空でないコンパクト

$$d(S(A), S(B)) = d\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)\right)$$

↑ Sの定義

$$\leq \max_{1 \leq i \leq m} d(S_i(A), S_i(B))$$

↑ 各部分がcoverされれば、全体もcoverされる

$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i |x - y|$ より、

$$d(S(A), S(B)) \leq \left(\max_i r_i\right) d(A, B)$$

↑ 距離はそれぞれr_iで縮小している.

$$\| \ \ d(A, B)$$

↖ A, Bがアトラクター

$\Rightarrow d(A, B) = 0 \quad \therefore A = B$

(存在)

$S(E)\subset E$ となるようにEをとる.

∵ $E=D\cap\overline{B}(0,r)$ でrを十分大きくする.

各iについて. $|S_i(x)-S_i(y)|\leq r_i|x-y|$ で.

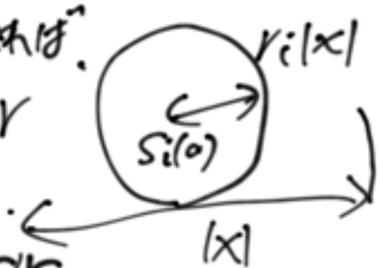
$y=0$ とすれば. $|S_i(x)-S_i(0)|\leq r_i|x|$

$S_i(0)$と比べて十分大きくrをとれば.

$|S_i(x)|\leq S_i(0)+r_i|x|\leq|x|\leq r$

が、$|x|$が大きい時成立.

$|x|$が小さい時はその内部なのでOK.



すると. $S^{k+1}(E)\subset S^k(E)$ となる.

∵ $S(E)\subset E$ より $S^2(E)\subset S(E)$、以下帰納的に

よって $S^k(E)$ は減少する空でないコンパクト集合列

∵ 減少は上より. Eが空でないので$S^k(E)$は空でない

Dは閉で. $\overline{B}(0,r)$は有界閉なので. Eはコンパクト

コンパクトの連続写像の像なので$S(E)$もコンパクト

以下同様

よって $K=\bigcap_k S^k(E)$ は空でないコンパクト集合

$$S(F)=S\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}S^k(E)\right)=\bigcap_{k=0}^{\infty}S(S^k(E))=\bigcap_{k=1}^{\infty}S^k(E)=F$$

$\because$ $\subset$は明らか
$\supset$を示す
$x\in\bigcap_{k=0}^{\infty}S(S^k(E))$なら、

すべてのkで $\exists z_k\in S^k(E)$, $\exists i$ $x=S_i(z_k)$ $\{z_{k_n}\}$

$\{z_k\}$の収束する部分列をとり、収束先をzとする。
↑Eはコンパクトなので有界。
ボルツァノ=ワイエルストラウス
更に上のiが同じになるように取れる。
各kについて $j\geq k\Rightarrow z_j\in S^k(E)$より、
$S^k(E)$は閉なので、 $z\in S^k(E)$
すなわち、$\bigcap_{k=0}^{\infty}S^k(E)\ni z$

$x=S_i(z_{k_n})$, $z_{k_n}\to z$, S_iは連続なので、
$x=S_i(z)$
すなわち、 $x\in S\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}S^k(E)\right)$

これはFがアトラクターであることを意味する。

コンパクト

直径 $|A| = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$

Aが閉集合とは.

$\forall x \in A$ に対し, $\exists B(x, r) \subseteq A$

Aが開集合とは、

$\{x_k\} \subseteq A$ が $\mathbb{R}^n$ で収束するなら. $\lim x_k \in A$

ϕ と $\mathbb{R}^n$ は開集合かつ閉集合

Aがコンパクトとは.

Aの任意のopen coverに対し.

有限部分でcoverされること.

定理 $\mathbb{R}^n$ 上の集合について. コンパクト $\Longleftrightarrow$ 有界閉集合

定理 コンパクトのintersectionはコンパクト

定理 コンパクトの減少列の intersection は空でない

∵ $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \cdots$ コンパクト

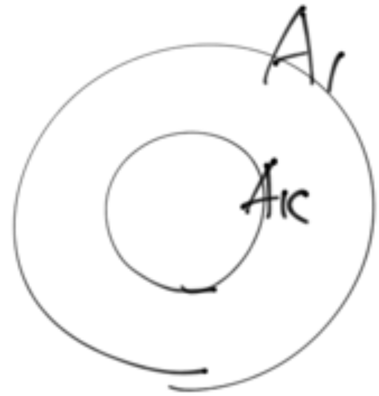
$\bigcap A_k = \phi$ とすると

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_k A_k = \bigcup_k (\mathbb{R}^n \setminus A_k)$ → increasing

これは A_1 の open cover なので、有限で cover される。

すなわち、 $A_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus A_k$

A_k も ϕ でないので矛盾 //



定理 コンパクト集合の連続写像による像はコンパクト

A $\quad$ f $\quad$ $f(A)$

∵ $f(A) \subset \bigcup_{\lambda \in I} O_\lambda$ cover とする.

$f^{-1}(O_\lambda)$ は open なので

$A \subset \bigcup_{\lambda \in I} f^{-1}(O_\lambda)$ は open cover

A はコンパクトなので $A \subset f^{-1}(O_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(O_n)$ 有限

$f(A) \subset O_1 \cup \cdots \cup O_n$

∵ $y \in f(A)$ ならば $\exists x \in A\ \exists k.\ x \in f^{-1}(O_k)$ より $f(x) = y \in O_k$

測度

$\mathbb{R}^n$上の測度 μ とは.

$\mathbb{R}^n$の各部分集合に非負の実数値(∞含む)を対応させる関数で

(a) $\mu(\phi)=0$

(b) $A\subset B \Rightarrow \mu(A)\leq \mu(B)$

(c) $$\mu\left(\bigcup_i A_i\right)\leq \sum_i \mu(A_i)$$

もし. A_iが互いに素なBorelなら.

$=$が成立する

通常の測度論の言葉では

- ・外測度
- ・Borelがmeasurableとなる

もののこと.

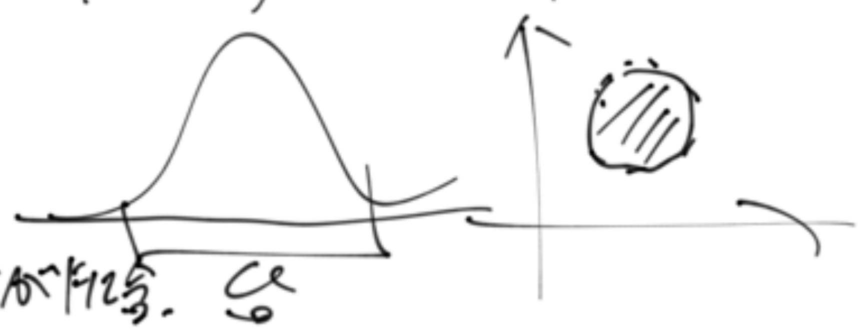
測度 $\Rightarrow$ 外測度　外からcoverする.

外測度 + Borel measurable $\Rightarrow$ 測度　Borelに制限

μの台(support)は. $\mu(\mathbb{R}^n\setminus X)=0$となる最小の閉集合

有限の時には.

質量分布と呼ぶ



K上の質量分布とは μの台がKに含.

測度μに対して、その台は一意に存在する。

閉集合Xがμの台

$\iff$ (1) $\mu(\mathbb{R}^n \setminus X)=0$

(2) $\forall Y$: 閉集合に対して、

$\mu(\mathbb{R}^n \setminus Y)=0$ ならば $X \subseteq Y$

$$X=\mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{B(x,r) : x\in\mathbb{R}^n,\ r>0,\ \mu(B(x,r))=0\}$$

とおくと、$\mathbb{R}^n$には可算開基が存在するので、
この和は可算和で書ける。

$\therefore\ \mu(\mathbb{R}^n \setminus X)=\mu(\bigcup\{B(x,r):\cdots\})=0$

$\exists Y$: 閉集合で、$\mu(\mathbb{R}^n\setminus Y)=0$ だが $X \not\subseteq Y$ とする。

$\exists x\in X$ だが $x\notin Y$ とすると

Yは閉集合なので $\exists r$, $B(x,r)\cap Y=\emptyset$

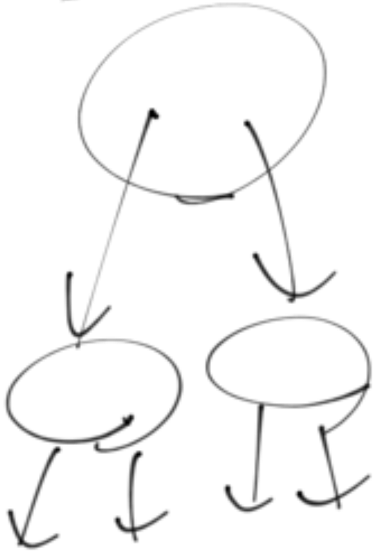
$\mu(\mathbb{R}^n\setminus Y)=0$ より $\mu(B(x,r))=0$

よって、$B(x,r)\cap X=\emptyset$

これは矛盾//

Observation

IFS



μの台はアトラクターFに含まれる.

$\because$ $\mathrm{spt}(\mu) \subseteq F$

$x \in \mathrm{spt}(\mu)$とすると.
すべての$r>0$に対し. $\mu(\overline{B}(x,r))>0$
もし$x \notin F$ならば. Fは閉集合なので.

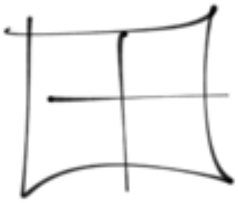
$$\exists r>0,\ F \cap \overline{B}(x,r) = \phi$$
$$\begin{aligned} F \cap \overline{B}(x,r) &= \left(\bigcap E_k\right) \cap \overline{B}(x,r) \\ &= \bigcap \underbrace{\left(E_k \cap \overline{B}(x,r)\right)}_{\text{コンパクトなので有限の}k\text{で}\phi\text{になる}} \end{aligned}$$

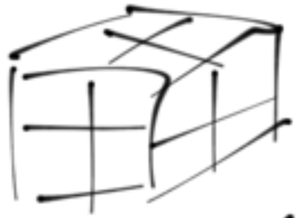
よって$\mu(\overline{B}(x,r))=0$ 矛盾

次元

次元では何か

2次元 3次元





大きさを2倍すると 面積は2^2倍

大きさを2倍すると 体積は2^3倍

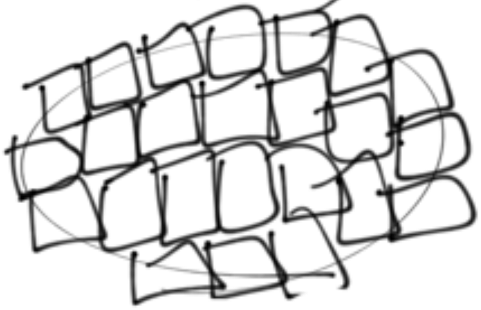
s次元なら大きさをr倍すると、r^s個になる
もし$r<1$で縮小してm個になるならば

$$r^s = \frac{1}{m} \text{ より } s\log r = -\log m$$

$$s = \frac{\log m}{-\log r}$$

これがsimilarity dimension

面積の定義、すなわちルベーグ外測度



E

$$S = \inf\left\{ \sum_i (A_i\text{の面積}) \;;\; E \subseteq \bigcup A_i \right\}$$

各A_iは長方形

A_iが正方形としても、Sは同じ値になる。

直径の2乗としても、Sは定数倍しか異ならない

A_iが小さくなれば、より正確な値に近づく。

直径の3乗とすると、0に収束する。

∵ d^2をd^3で置き換えると小さくなる。

直径の1乗とすると、A_iが小さくなれない

∵ d^2をdで置き換えると大きくなる

A_iを無理やり小さくした時に、

0より大きい有限の値に収束するような指数が、

その次元

$|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ Uの直径、

$\{U_i\}$がFのδ-coverであるとは、

可算 or 有限

$F \subseteq \bigcup_i U_i$ かつ $0 < |U_i| \leq \delta$

U_iはどんな集合でも良いが直径δの球体として良い

$$H^s_\delta(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}はFの\delta\text{-cover}\right\}$$

δが小さくなると可能なcoverは少なくなるので、
H^s_δは大きくなる。

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$$

0と∞を合わせて、必ず極限が存在する
この$H^s(F)$をFのs次元Hausdorff測度という

H^sが測度となることも示せる。証明は省略

整数次元に関しては、
ルベーグ測度の定数倍となる。

$$H^1 = \lambda_1, \quad H^2 = \frac{4}{\pi}\lambda_2, \cdots$$

c_nを直径1のn次元球体の体積とすると、

$$H^n(F) = c_n^{-1}\lambda_n(F)$$

次にλ倍すると、H^sではλ^s倍となることを示す

Thm

$F\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:F\to\mathbb{R}^m$

ヘルダー条件

Hölder condition

$$|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|^\alpha$$

となるc,αが存在するとき、

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F))\leq c^{\frac{s}{\alpha}}H^s(F)$$

特に、リプシッツ($\alpha=1$)なら、$H^s(f(F))\leq c^sH^s(F)$

Prf $\{U_i\}$をFのδ-coverとする

$|f(F\cap U_i)|\leq c|F\cap U_i|^\alpha\leq c|U_i|^\alpha$

$\because$ $f(x),f(y)\in f(F\cap U_i)$に対して、

$|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|^\alpha$

よって$\{f(F\cap U_i)\}$は$f(F)$の$c\delta^\alpha$-cover

集合であれば何でも良いが、球体に広げても良い

$\therefore\sum_i|f(F\cap U_i)|^{\frac{s}{\alpha}}\leq c^{\frac{s}{\alpha}}\sum_i|U_i|^s$

infをとれば、$H^{\frac{s}{\alpha}}_{c\delta^\alpha}(F)\leq c^{\frac{s}{\alpha}}H^s_\delta(F)$で$\delta\to0$とすれば良い

Thm

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ λの相似変換

$F\subseteq\mathbb{R}^n$

$$H^s(f(F))=\lambda^s H^s(F)$$

∵ $|f(x)-f(y)|=\lambda|x-y|$ より.

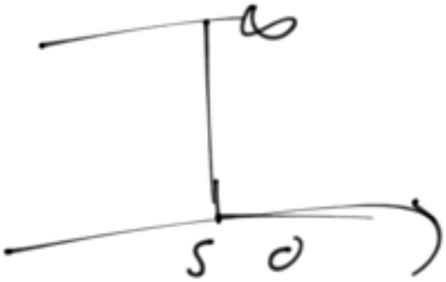
$H^s(f(F))\leqq\lambda^s H^s(F)$.

逆写像も存在し、$|f^{-1}(x)-f^{-1}(y)|=\lambda^{-1}|x-y|$

よって. $H^s(F)=H^s(f^{-1}\circ f(F))\leqq\lambda^{-s}H^s(f(F))$ //

平行移動で、ハウスドルフ測度は変化しないことも分かる

ハウスドルフ次元



$H_s(F)<\infty$ ならば
すべての $t>s$ で
$H_t(F)=0$

$$\sum_i |U_i|^t \le \sum_i |U_i|^{t-s}|U_i|^s \le \delta^{t-s}\sum_i |U_i|^s$$

より. $H^t_\delta(F) \le \delta^{t-s} H^s_\delta(F)$ で $H^t(F)=0$ //

これをハウスドルフ次元と呼ぶ

$$\begin{aligned}\dim_H F &= \inf\{s\ge 0 : H^s(F)=0\}\\ &= \sup\{s : H^s(F)=\infty\}\end{aligned}$$

$s=\dim_H F$ に対しては. $H^s(F)=0, \infty$ となることもあるし、$0< H^s(F) < \infty$ となることもある。

Monotonicity $E \subset F \Rightarrow \dim_H E \leq \dim_H F$

Range $F \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow 0 \leq \dim_H F \leq n$

Countable $\dim_H \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \sup_i \dim_H F_i$

Fが可算なら、$\dim_H F = 0$

open $F \subset \mathbb{R}^n$が開集合なら、$\dim_H F = n$

ハウスドルフ次元の計算例1 (Cantor set)

$s=\frac{\log 2}{\log 3}$ として $H^s(F)$ を計算する

Kを1つ固定して.

E_K

2^k個, 長さ3^{-k}

これを 3^{-k}-coverとすれば.

$$H^s_{3^{-k}}(F) \leq 2^k \times (3^{-k})^s = 1$$

← このcoverの存在

すべてのkについて成立するから $k \to \infty$ として.

よって $H^s(F) \leq 1$

$H^s(F) \geq \frac{1}{2}$ を示す

任意のcoverについて.

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2}$$

を示せば良い

各U_iは閉区間と仮定して良い ∵ 必要なら2倍する

Fはコンパクトなので、有限個でcoverできる

U_iは有限個として良い

各 U_i に対して

$$3^{-(k+1)} \le U_i < 3^{-k}$$

となる k をとる.

U_i は E_k のうち高々1つとしか交わらない
$j \ge k$ に対しては U_i が交わるのは

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \le 2^j 3^s \cdot |U_i|^s$$

すべての i で $3^{-(j+1)} \le |U_i|$ となるように
十分大きく j を選べば、
$\bigcup U_i$ が 2^j すべてと交わるはずだから、

$$2^j \le \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s$$

これより $$\sum_i |U_i|^s \ge 3^{-s} = \frac{1}{2}$$ //

実は $H^s(F) = 1$

質量分布原理

μ: F上の質量分布
$\forall U.\ |U| \leq \varepsilon$ に対して、

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

なら、$H^s(F) \geq \mu(F)/c$

<u>Pf</u> $F \subseteq \bigcup_i U_i$ とする。

$$0 \underset{\text{mass distribution}}{<} \mu(F) \underset{\text{cover}}{\leq} \mu\left(\bigcup_i U_i\right) \underset{\text{劣加法性}}{\leq} \sum_i \mu(U_i) \underset{\text{仮定}}{\leq} c\sum |U_i|^s$$

inf をとって、

$$H^s_\delta(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$$

$\delta \to 0$ として、$H^s(F) \geq \dfrac{\mu(F)}{c}$ $\therefore \dim_H F \geq s$

例 Cantor set

E_k

2^k個にそれぞれ2^{-k}の測度を与える.

U : set $|U| < 1$

k : $3^{-(k+1)} \le |U| < 3^{-k}$.

UはE_kのうち、高々1つと交わる.

$$\mu(U) \le 2^{-k} = \left(3^{\log 2/\log 3}\right)^{-k}$$

$$= \left(3^{-k}\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}} \le \left(3|U|\right)^{\frac{\log 2}{\log 3}}$$

$$\therefore H^{\frac{\log 2}{\log 3}}(F) \ge \frac{1}{3^{\frac{\log 2}{\log 3}}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \dim_H(F) \ge \frac{\log 2}{\log 3}$$

反復関数系で与えられるフラクタルの次元

$S_1, \cdots S_m$ で比は r_i とする。

$$\sum_{i=1}^{m} r_i^{s} = 1$$

を満たす唯一の s がハウスドルフ次元となる。

ここから相似次元 $\dfrac{\log r}{-\log m}$ はすぐ分かる。

これを示すために上からと下からの評価を与える。

Thm 9.6. P143

F：IFSのアトラクター

↳ $\{S_1, \cdots, S_m\}$ D上.

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq r_i |x-y| \quad x, y \in D$$

$$0 < r_i < 1$$

Then. $\dim_H F \leq s$. ここで $\sum_{i=1}^{m} r_i^s = 1$

証明

$\sum_i r_i^s = 1$ となる s をとる.

$$I_k = \{(i_1, \cdots, i_k) : 1 \leq i_j \leq m\}$$

集合Aに対し. $A_{i_1, \cdots, i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(A)$ と書く.

Fをアトラクターとすると. $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$ なので.

これを繰り返し使って.

$$F = \bigcup_{I_k} F_{i_1, \cdots, i_k}$$

これは F の cover になっている．
更に，

$$\sum_{I_k} |F_{i_1,\cdots,i_k}|^s = \sum_{I_k} (r_{i_1}\cdots r_{i_k})^s |F|^s$$

$$= \left(\sum_{i_1} r_{i_1}^s\right) \cdots \left(\sum_{i_k} r_{i_k}^s\right) |F|^s = |F|^s$$

$$\sum_i r_i^s = 1$$

$\delta > 0$ が与えられれば，

$$|F_{i_1,\cdots,i_k}| \leq (\max_i r_i)^k |F| < \delta$$

を満たすように k をとることで，
これらが F の δ-cover となる．
よって $H^s_\delta(F) \leq |F|^s$ より $H^s(F) \leq |F|^s$
よって $\dim_H F \leq s$

Thm 9.7

IFS: $\{S_1, \cdots S_m\}$ on $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$b_i|x-y| \le |S_i(x) - S_i(y)| \quad (x, y \in D)$$

with $0 < b_i < 1$.

F: アトラクター

$S_i(F)$ が互いに素

このとき、$\dim_H F \ge s$　ここで $\sum_{i=1}^{m} b_i^s = 1$

証明

$$d = \min_{i \ne j} \inf\{|x-y| : x \in S_i(F), y \in S_j(F)\}$$

互いに素なので、$d > 0$

前と同様に $F_{i_1, \cdots, i_k} = S_{i_1} \circ \cdots \circ S_{i_k}(F)$

$$\mu(F_{i_1, \cdots, i_k}) = (b_{i_1} \cdots b_{i_k})^s$$

で定義する。

$\mu(F) = 1$ の測量分布となる。

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(F_{i_1, \cdots, i_k, i}) = \sum (b_{i_1} \cdots b_{i_k} b_i)^s = \mu(F_{i_1, \cdots i_k})$$

$|U|<d$ を満たすすべての U に対し、

$$\mu(U)\le d^{-s}|U|^s$$

を満たすことを示す。
そうすれば、質量分布原理により、$\dim_H F\ge s$ が言える。

U をとる。

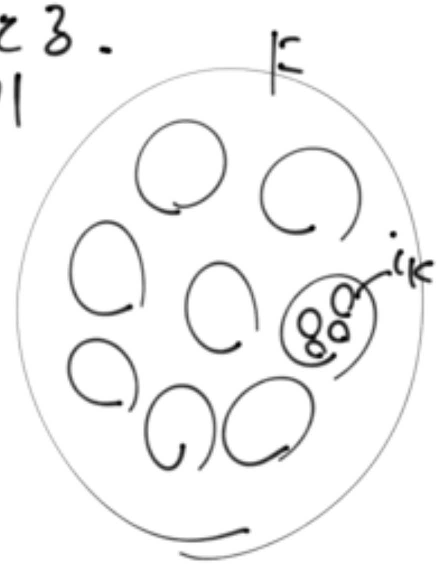
$U\cap F=\phi$ なら $\mu(F)=0$ より OK

∵ μ は F 上の測度

$U\cap F\ne\phi$ なら $x\in U\cap F$ をとる。

すると、$U\subseteq B(x,r)$, $r=|U|$

∵ $\forall x,y\in U$, $|x-y|\le r$



この x に対して、任意の k で、

$x\in F_{i_1,\dots,i_k}$

となる無限列 $\{i_j\}$ をとる。

$b_{i_1}\cdots b_{i_k}d\le r<b_{i_1}\cdots b_{i_{k-1}}d$

となる最小の k をとる

$i_1,\dots,i_k$ と $i_1',\dots,i_k'$ が全部は同じでなければ、

$F_{i_1,\dots,i_k}$ と $F_{i_1',\dots,i_k'}$ は $b_{i_1}\cdots b_{i_{k-1}}d$ だけ離れている

∵ $i_j\ne i_j'$ となる最小の j をとり、

$F_{i_j\cdots i_k}\subset F_{i_j}$ と $F_{i_j'\cdots i_k'}\subset F_{i_j'}$ は d 離れている。

$F_{i_1,\dots,i_k}$ と $F_{i_1'\cdots i_k'}$ は $b_{i_1}\cdots b_{i_{j-1}}d$ だけ離れている

これは. $b_{i_1}\cdots b_{i_{k+1}} d$ より大きい

よって. $F\cap\overline{B}(x,r)\subset F_{i_1,\cdots,i_k}$

∵ 他のコンポーネントとの距離は r より大きい

$$\therefore\ \mu(F\cap\overline{B}(x,r))\leq\mu(F_{i_1\cdots i_k})$$
$$=(b_{i_1}\cdots b_{i_k})^s\leq\left(\frac{r}{d}\right)^s$$

$b_{i_1}\cdots b_{i_k}d\leq r$ より

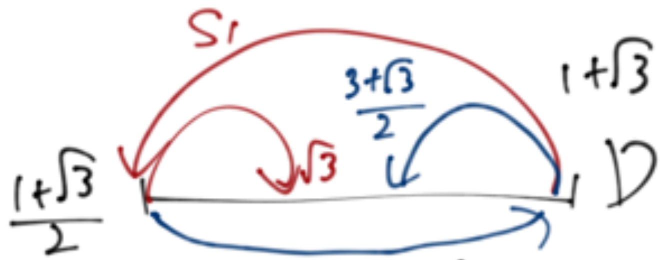
$$\therefore\ \mu(U)=\mu(U\cap F)\leq\mu(F\cap\overline{B}(x,r))\leq d^{-s}|U|^s$$

$U\subseteq\overline{B}(x,r)$

//

例 非線形 Cantor set

$$D=\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ 1+\sqrt{3}\right]$$



$S_1, S_2 : D \to D$

$$S_1(x) = 1+\frac{1}{x}$$
$$S_2(x) = 2+\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1} = \sqrt{3}-1$$
$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$
$$1+\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$
$$1+\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

アトラクターのハウスドルフ次元を計算しよう.

平均値の定理から

$$\frac{S_i(x)-S_i(y)}{x-y} = S_i'(z_i)$$

となる $z_i \in D$ が存在するので

$$\inf_{x\in D}|S_i'(x)| \le \frac{|S_i(x)-S_i(y)|}{|x-y|} \le \sup_{x\in D}|S_i'(x)|$$

$S_1'(x) = S_2'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ より

$\inf|S_i'(x)| = \dfrac{1}{(1+\sqrt{3})^2}$ で $2\left(\dfrac{1}{(1+\sqrt{3})^2}\right)^s = 1$ から

$$s = \frac{\log\frac{1}{2}}{-2\log(1+\sqrt{3})} \fallingdotseq 0.3448\cdots\cdot$$

$\sup|S_i'(x)| = \dfrac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ で $s = \dfrac{\log\frac{1}{2}}{-2\log\frac{1+\sqrt{3}}{2}} \fallingdotseq 1.11$

精度が悪いので、4つの写像からなるアトラクターを使う

$$S_i \circ S_j = i + \frac{1}{j + \frac{1}{x}} = i + \frac{x}{jx+1} \quad (i, j = 1, 2)$$

$$(S_i \circ S_j)'(x) = \frac{1}{(jx+1)^2}$$

$$\inf = \frac{1}{(j(1+\sqrt{3})+1)^2}$$

$$\sup = \frac{1}{(\frac{j}{2}(1+\sqrt{3})+1)^2}$$

$$2\left(\frac{1}{((1+\sqrt{3})+1)^2}\right)^s + 2\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{3})+1}\right)^s = 1$$

$$2\left(\frac{1}{(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})+1)^2}\right)^s + 2\left(\frac{1}{\frac{2}{2}(1+\sqrt{3})+1}\right)^s = 1$$

$$2(2+\sqrt{3})^{-2s} + 2(3+2\sqrt{3})^{-2s} = 1$$

WalframAlpha などに解かせると、

$s = 0.444785$

$$2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)^{-2s} + 2(2+\sqrt{3})^{-2s} = 1$$

$s = 0.656912$

ハウスドルフ次元は、
集合に対してcoverのしやすさを測っている。
これは一種の複雑さの指標であり
(・どのくらい予測しやすいか
・どのくらい記述しやすいか
として表現できる

以下では $X \subseteq [0,1]$ とする。
$x \in X$ を予測する。
x を2進展開して、次の桁が何かを当てる。
$x \in X$ の時には資金を $O(2^{(1-s)n})$ のオーダーで
増やせるならば、

$$\dim_H(X) \leq s$$

である。
$x \in X$ となるすべての x で増やせる必要がある。
$x \notin X$ であれば、資金は0になっても良い。
ただし、どんな場合でも、資金は非負で、
借金はできない

可算集合は次元に関係ないので、
有理数は無視する。

$[0, \frac{1}{2}]$ のことを $[0]$ と書き、
$[\frac{1}{2}, 1]$ のことを $[1]$ と書く。
$[0, \frac{1}{4}]$ のことを $[00]$ と書く。
つまり2進展開がその文字で始まる実数の集合

ゲームは次のように進む
最初は資金1.
次の桁が0なのか1なのかに、
金額 x を賭ける。
例えば、0に賭けて、0であれば、
資金は x 増える。
0でなければ x 減る。

文字列 σ の時の資金を $M(\sigma)$ と書くと、

$$M(\lambda) = 1 \quad (\lambda \text{は空列})$$

$$M(\sigma) = \frac{M(\sigma 0) + M(\sigma 1)}{2}$$

が成り立つ。

戦略が決まれば、資金の変化も決まり、
逆も言える
よってこの関数 M が戦略そのものだと思える
この M をマルチンゲールと呼ぶ

Thm

$X \subseteq [0,1]$ に対し、以下は同値

(i) $\dim_H(X) = r$

(ii) $r = \inf\{ s \in \mathbb{Q} : \exists M$: マルチンゲール

$\forall x \in X$

$$\sup_n \frac{M(x \upharpoonright n)}{2^{(1-s)n}} = \infty \}$$

証明

$H^s(X) = 0$ なら上のような M が存在することを示す

$\forall k \in \mathbb{N}, \exists U_k.$ $X \subseteq \bigcup_i [\sigma_k^i]$ cover する.

U_k: $[\sigma]$ の形をした集合の列

かつ $\sum_i 2^{-s|\sigma_k^i|} \leq 2^{-k}$

Rem
$|[\sigma_k^i]| = 2^{-|\sigma_k^i|}$

σ_k^i は互いに素(有理数点を除く)として良い

1から始めて

E_σ を σ に対して全額賭けるマルチンゲールとする.

つまり

$\tau \preceq \sigma$ なら $E_\sigma(\tau) = 2^{|\tau|}$

$\sigma \preceq \tau$ なら $E_\sigma(\tau) = 2^{|\sigma|}$

それ以外なら $E_\sigma(\tau) = 0$

$$M_k = \sum_i 2^{-s|\sigma_k^i|} E_{\sigma_k^i} , \quad M = \sum_k M_k \text{ とおくて.}$$

$$M_k(\lambda) = \sum_i 2^{-s|\sigma_k^i|} \leq 2^{-k}, \quad M(\lambda) \leq 1$$

よってMはマルチンゲール.

$x \in X$ なら. $\forall k \exists i \quad \sigma_k^i \preceq x$

すべての $t > s$ について

$$\frac{M(\sigma_k^i)}{2^{(1-t)|\sigma_k^i|}} \geq \frac{M_k(\sigma_k^i)}{2^{(1-t)|\sigma_k^i|}} = \frac{2^{-s|\sigma_k^i|} \cdot 2^{|\sigma|}}{2^{(1-t)|\sigma_k^i|}}$$

$$= 2^{(t-s)|\sigma_k^i|}$$

よって $\sup = \infty$

逆を示す
マルチンゲールMに対し、
各pathについて、$\dfrac{M(\sigma)}{2^{(1-s)|\sigma|}} \geq 2^{k}$

が初めて成立する文字σの集合をV_kとする。
$\bigcup_{\sigma \in V_k} [\sigma]$ はXをcoverする

$$\sum_{\sigma \in V_k} 2^{-s|\sigma|} \leq \sum_{\sigma \in V_k} 2^{-s|\sigma|} \cdot \frac{M(\sigma)}{2^{(1-s)|\sigma|}} \cdot 2^{-k}$$

$$= 2^{-k} \sum_{\sigma \in V_k} 2^{-|\sigma|} M(\sigma) \leq 2^{-k}$$

V_kは互いに素
マルチンゲールの
性質
気持ちとしては、
$2^{-|\sigma|}$：確率
$M(\sigma)$：その時の値、
$\sum$：期待値、
マルチンゲールに対しては
期待値は変化しない

記述可能性

マルチンゲール M に対し、

$$KM_M(\sigma) = -\log_2 \underbrace{2^{-|\sigma|}M(\sigma)}_{\text{測度}}$$

とすると、$0 \leq KM_M(\sigma) \leq |\sigma|$

これは M というプログラミング言語で σ の複雑性を表現している。

σ という文字列を出力するために必要なプログラムの最小の長さが $KM_M(\sigma)$

σ が単純なら $KM_M(\sigma)$ は小さい

σ が複雑なら $KM_M(\sigma)$ は $|\sigma|$ に近い

$$\underbrace{\mathrm{edim}_H}_{}(X) = \sup_{x \in X} \limsup_n \underbrace{\frac{KM(x \upharpoonright n)}{n}}_{\text{どれくらい圧縮できるか}}$$

ハウスドルフ次元で、
計算可能性を
課したもの。

ハウスドルフ次元は、集合の複雑さを測る指標である//