試験 A

問題 1. $z = \left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{100}$ とした時，$e^{i\pi z}$ を求めよ.

問題 2. $\log(1+i)$ を $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 3. $\tan z = \dfrac{3}{5}i$ となる z を求めよ.

問題 4. $f(z) = |z|^2$ が微分可能となる点を求めよ.

問題 5. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$ を複素微分せよ.

問題 6. $z = x+iy$ として，$f(z) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + y + iv(x, y)$ が正則となるような $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ を求めよ.

問題 7. $f(z) = z\cos z$ として，π から i までの線分 C での線積分 $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよ.

問題 8. $f(z) = 1/(z^2+z-2)$ として，$|z| = 3/2$ の円 C 上での周回積分 $\displaystyle\oint_C f(z)dz$ を求めよ.

問題 9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2-i)^{2n}}{n} z^n$ の収束半径を求めよ.

問題 10. $f(z) = \sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ を $z = \dfrac{\pi}{2}i$ でべき級数展開したときの n 次の係数 a_n を求めよ.

解答

(1) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = e^{\pi/3i}$，$100 = 6 \times 16 + 4$ より，$z = e^{\frac{4\pi}{3}i} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, $i\pi z = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{\pi}{2}i$. よって，$e^{i\pi z} = -e^{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}i$.

(2) $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ より，$\log(1+i) = \frac{1}{2}\log 2 + (\frac{\pi}{4} + 2n\pi)i$, $n \in \mathbb{N}$.

(3) $\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{iz}}\frac{1}{i} = \frac{3}{5}i$ より $e^{2iz} = \frac{1}{4}$. これより，$2iz = -2\log 2 + 2n\pi i$ なので，$z = i\log 2 + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

(4) $f(z) = x^2 + y^2$ より，$u_x = 2x$, $u_y = 2y$, $v_x = 0$, $v_y = 0$. コーシー・リーマンの関係式が成立するのは，$x = y = 0$. すなわち，$z = 0$ でのみ微分可能.

(5) $f(z) = \frac{(z+i)\cos z - \sin z}{(z+i)^2}$.

(6) $u_x = 4x^3 - 12xy^2 = v_y$ より $v = 4x^3y - 4xy^3 + f(x)$ で $v_x = 12x^2y - 4y^3 + f'(x)$ $u_y = -12x^2y + 4y^3 + 1 = -v_x$ より $f'(x) = -1$ なので，$f(x) = -x + c$ で，$v = 4x^3y - 4xy^3 - x + c$.

(7) $\int z\cos z dz = z\sin z - \int \sin z dz = z\sin z + \cos z$. 被積分関数は正則なので

$$\int_C f(z)dz = [z\sin z + \cos z]_\pi^i = i\sin i + \cos i + 1.$$

$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ より $\cos i = \frac{e^{-1}+e}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ より $\sin i = \frac{e^{-1}-e}{2i}$ なので，求める値は $e^{-1} + 1$.

(8) $\frac{1}{z^2+z-2} = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$. 領域 $|z| \leq \frac{3}{2}$ 内にあるのは $z = 1$ のみなので，求める積分は $\frac{2\pi i}{3}$.

(9) $\limsup |a_n|^{1/n} = |2-i|^2 = 5$ より，収束半径は $\frac{1}{5}$.

(10) $\alpha = z - \frac{\pi}{2}i$ とおくと，$e^z = e^{\alpha+\frac{\pi}{2}i} = ie^\alpha$, $e^{-z} = -ie^{-\alpha}$ より，$\sinh z = \frac{ie^\alpha+ie^{-\alpha}}{2}$. $e^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n}{n!}$ より，

$$a_n = \begin{cases} \frac{i}{n!} & (n : \text{even}), \\ 0 & (n : \text{odd}) \end{cases}$$

試験 B

問題 1. 複素関数 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ に対して，複素微分可能と正則であることの違いを説明せよ．

問題 2. べき級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ が $z=w$ で収束することの定義を書け．

問題 3. $z=x+iy$ とし，複素関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ として，u,v が C^1 級であるとする．この時，コーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann equations) が成り立つ点で複素微分可能であることの証明を書け．

問題 4. $f(z)=(z-\alpha)^m$ として，中心 α，半径 r の円 C での周回積分 $\displaystyle\oint_C f(z)dz$ を求めよ．

問題 5. べき級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ はその収束半径内で連続であることを示せ．

解答

問題 1. f が $z=w$ で微分可能であるとは，$\lim_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ が存在すること．f が領域 D で正則であるとは，領域内すべての点で微分可能であること．

問題 2. 任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nw^n|<\epsilon$ となること．

問題 3. $u,v\in C^1$ より，

$$u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}h_1+\frac{\partial u}{\partial y}h_2+|h|\psi_1(h)$$

かつ

$$v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}h_1+\frac{\partial v}{\partial y}h_2+|h|\psi_2(h)$$

ここで，$h=h_1+ih_2$ で，$h\to 0$ のとき，$\psi_1,\psi_2\to 0$. よって，

$$\begin{aligned}f(z+h)-f(z)=&(u_xh_1+u_yh_2)+i(v_xh_1+v_yh_2)+|h|\psi(h)\\=&(u_xh_1+u_yh_2)+i(-u_yh_1+u_xh_2)+|h|\psi(h)\\=&(u_x-iu_y)h_1+(u_y+iu_x)h_2+|h|\psi(h)\\=&(u_x-iu_y)(h_1+ih_2)+|h|\psi(h)\end{aligned}$$

よって，

$$\frac{df}{dz}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=u_x-iu_y$$

であり，微分可能.

問題 4. 求める積分を I とし，$z=\alpha+re^{it}$ とパラメタ表示する．$\frac{dz}{dt}=rie^{it}$ である．$m\neq -1$ のとき，

$$I=\int_0^{2\pi}r^me^{mit}rie^{it}dt=\frac{r^{m+1}}{(m+1)i}[e^{(m+1)it}]_0^{2\pi}=0.$$

$m=-1$ のとき，

$$I=\int_0^{2\pi}e^{-it}ie^{it}dt=2\pi i.$$

問題 5. 収束半径を R とする．$|w|<R$ として，$z=w$ で連続であることを示す.

$\epsilon>0$ を固定する．$|w|<r<R$ となる $r\in\mathbb{R}$ をとる．$z=r$ で絶対収束するので，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|r^n<\epsilon.$$

$0<\delta<r-|w|$ となる δ をとれば，

$$|z-w|<\delta\Rightarrow|z|\leq|z-w|+|w|<r$$

なので，

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n z^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| r^n < \epsilon.$$

多項式 $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ は連続なので，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，

$$|z-w| < \delta_1 \Rightarrow |\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n w^n| < \epsilon.$$

これらより，$|z-w| < \min(\delta, \delta_1)$ のとき，

$$|f(z) - f(w)| \leq |\sum_{n=0}^{N} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} a_n w^n| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n| + |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n w^n| \leq 3\epsilon.$$

よって，f は連続.