試験要項

- 試験日程：5 月 31 日 (水)
- 試験 A 試験時間：9:00〜9:50，試験 B 試験時間：10:00〜12:30
- 出題範囲：複素数，複素関数，複素関数の微分
- 試験 A：計算問題（解答・採点は答えのみ），試験 B：証明問題
- 教科書持ち込み可
- インターネットでの検索可
- 飲食可
- 一時退室可
- 相談不可
- 受験資格：関数論 1 および関数論 1 演習を履修していること
- 試験 A の結果はその日のうちに，試験 B の結果は次の週に返却する
- 単位認定には影響しない
- 試験結果の統計データは公開する

試験 A

答えのみ解答せよ．　　　　　　年　　　組　　　番　氏名

問題 1. $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = -2 + 5i$ のとき，$\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 2. $z^3 + i = 0$ となる $z \in \mathbb{C}$ をすべて求め，$a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 3. $e^{-\frac{\pi}{6}i}$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 4. $\log(1 + \sqrt{3}i)$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 5. $\alpha = \frac{\pi}{2} + i$ のとき，$\tan\alpha$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 6. 2^{-i} を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ.

問題 7. $f(z) = \dfrac{z - 1 + i}{z + 1 + i}$ を微分せよ.

問題 8. $z^2 - (3 + 2i)z + (1 + 3i) = 0$ を満たす z を求めよ.

問題 9. $i(x + i)^4$ が実数となるように $x \in \mathbb{R}$ を定めよ.

問題 10. $\dfrac{(i - 1)z}{i(z - 2)}$ が実数となる $z \in \mathbb{C}$ の動く範囲は円となる．中心と半径を求めよ.

問題 11. z^z が実数となる虚数 z をすべて求めよ.

問題 12. $\cos z = 2$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.

問題 13. $f(x + iy)$ の実部が $x^2 - y^2$ となる正則関数 f の虚部として取りうる関数をすべて求めよ.

解答

1-6 は 1 問 5 点，7-13 は 1 問 10 点，合計 100 点

(1) $\frac{13}{29} - \frac{11}{29}i$
(2) i，$\frac{\pm\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
(3) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
(4) $\log 2 + (\frac{1}{3} + 2n)\pi i$
(5) $\frac{e^2+1}{e^2-1}i$
(6) $\cos(\log 2) - i\sin(\log 2)$
(7) $\frac{2}{(z+1+i)^2}$
(8) $2+i, 1+i$
(9) $\pm 1 \pm \sqrt{2}$ (複合任意)
(10) 中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$
(11) $\pm i$ など
(12) $z = 2n\pi + i\log(2 \pm \sqrt{3})$
(13) $2xy + c$, c は任意の実数

試験 B

問題 1. 複素関数 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に関して，g が $z = w$ で複素微分可能であることの定義を書け．

問題 2. $|\alpha| < 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f(z) = \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha} z}$$

という変換を考える．(ブラシュケ因子と呼ばれる．)

(1) $|z| < 1$ ならば $|f(z)| < 1$ を示せ．
(2) $|z| = 1$ ならば $|f(z)| = 1$ を示せ．
(3) $|z| \leq 1$ の範囲で $f \circ f(z) = z$ を示せ．

問題 3. $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ をある領域で正則な関数とする．その領域上で，

$$\Delta u = \Delta v = 0$$

を示せ．ここで，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ はラプラシアンである．$u, v \in C^2$ は仮定して良い．

問題 4. $f(z)$ が領域 D で正則であるとする．

(1) $\overline{f(z)}$ が D で正則ならば，$f(z)$ は定数関数であることを示せ．
(2) $f(z)$ は D で実数値のみをとるならば，$f(z)$ は定数関数であることを示せ．
(3) $|f(z)|$ が定数ならば，$f(z)$ は定数であることを示せ．

問題 5. 次を満たす複素関数 f を求めよ．

(1) $f(z)$ は $z \neq 0$ で正則．
(2) $f(re^{i\theta}) = g(r)e^{ih(\theta)}$ を満たす実関数 g, h が存在する．

(問題補足：(1)(2) の両方の条件を満たす関数 f を求める．)

問題 6. ラグランジュの三角恒等式

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + 1/2)\theta}{2\sin\theta/2}, \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

を示せ．

問題 7.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

を示せ．

問題 8. 自分自身の試験 A と試験 B それぞれの予想点数を書いて下さい．

問題 9. 関数論 1 の授業，明治大学数学科の教育，生田キャンパスの生活，または日本での大学教育のどれかについて，特に大きな問題点を 1 つ挙げ，その解決案を提案して下さい．

解答

問題 1. 教科書参照.

問題 2. (1)

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 < 1 &\iff \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}\cdot\frac{\overline{\alpha}-\overline{z}}{1-\alpha\overline{z}} < 1 \\
&\iff |\alpha|^2 - \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |z|^2 < 1 - \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + |\alpha|^2|z|^2 \\
&\iff (1-|\alpha|^2)(1-|z|^2) > 0.
\end{aligned}
$$

最後の式は $|\alpha| < 1$ かつ $|z| < 1$ より成り立つ.

(2) 上記で $<$ を $=$ に換えれば良い.

(3) 計算すると,

$$
f \circ f(z) = \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1-\overline{\alpha}z}}{1-\overline{\alpha}\frac{\alpha-z}{1-\overline{\alpha}z}} = \frac{\alpha(1-\overline{\alpha}z)-(\alpha-z)}{1-\overline{\alpha}z-\overline{\alpha}(\alpha-z)} = \frac{(1-|\alpha|^2)z}{1-|\alpha|^2} = z
$$

問題 3. コーシーリーマンの方程式より,

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0.
$$

$u \in C^2$ より偏微分の入れ替えは可能.

問題 4. $f(x+iy) = u + iv$ とおく．コーシーリーマンの関係式より，$u_x = v_y, u_y = -v_x$.

(1) $\overline{f} = u - iv$ が正則なので，$u_x = -v_y, u_y = v_x$. よって，$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. すなわち，$u, v$ は定数で，f は定数.

(2) $v = 0$ より，$u_x = v_y = 0, u_y = -v_x = 0$.

(3) $c \geq 0$ として，$u^2 + v^2 = c^2$ となる．$c = 0$ のときは，$u = v = 0$ なので，f は定数．$c > 0$ とする．$u^2 + v^2 = c^2$ を x, y で偏微分して，$uu_x + vv_x = 0$，$uu_y + vv_y = 0$. コーシーリーマンの関係式を代入して，u_x, y_y だけの式にすると，$uu_x - vu_y = 0, uu_y + vu_x = 0$. $u^2 + v^2 > 0$ より $u_x = u_y = 0$. よって，$v_x = v_y = 0$.

問題 5. まず，極座標におけるコーシーリーマンの関係式を求める.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}, \\
\frac{\partial v}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

これより，$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$. 同様にして，$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$.

$f = g(r)\cos h(\theta) + ig(r)\sin h(\theta)$ より，上記の式と見比べることで,

$$
g'(r) = \frac{g(r)}{r}h'(\theta)
$$

が得られる．これを解いて，$h(\theta) = a\theta + b,\ g(r) = cr^a$. ただし，$a, b, c \in \mathbb{R}$. すなわち,

$$
f(z) = cr^a e^{ia\theta + b} = \alpha z^a.
$$

ここで，$\alpha \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$ である.

問題 6. 恒等式 $1+z+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ に $z=e^{i\theta}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺の実部}) =& 1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta, \\
(\text{右辺}) =& \frac{1-\cos(n+1)\theta-i\sin(n+1)\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}, \\
(\text{右辺の実部}) =& \frac{(1-\cos(n+1)\theta)(1-\cos\theta)+\sin(n+1)\theta\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

この右辺の実部について，

$$(\text{分母})=2-2\cos\theta=2(1-(1-2\sin^2\theta/2))=4\sin^2\theta/2.$$

また，

$$\begin{aligned}
(\text{分子}) =& 2(1-\cos(n+1)\theta)\sin^2\theta/2+2\sin(n+1)\theta\sin\theta/2\cos\theta/2 \\
=& 2\sin^2\theta/2+2\sin\theta/2(\sin(n+1)\theta\cos\theta/2-\cos(n+1)\theta\sin\theta/2) \\
=& 2\sin^2\theta/2+2\sin\theta/2\sin(n+1/2)\theta.
\end{aligned}$$

これより与式が得られる．

問題 7. $\theta_k=\frac{k\pi}{2n+1}$ とおくと，$(e^{i\theta_k})^{2n+1}=e^{ki\pi}=(-1)^k$．一方，

$$(e^{i\theta_k})^{2n+1}=(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)^{2n+1}=\sin^{2n+1}\theta_k\left(\frac{1}{\tan\theta_k}+i\right)^{2n+1}.$$

さらに最後の括弧の部分は，

$$\sum_{j=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{j}\frac{1}{\tan^j\theta_k}i^{2n+1-j}$$

と書ける．その虚部は，j が偶数のときに現れるので，$\frac{1}{\tan^2\theta_k}$ の n 次多項式とみなせる．それを $f(x)$ とおく．$\frac{1}{\tan^2\theta_k}$ は $f(x)$ の n 個の解であるから，解と係数の関係よりその和は求まる．$f(x)$ における x^n の係数は，$j=2n$ のときであるから，$2n+1$ であり，x^{n-1} の係数は，$j=2n-2$ のときであるから，$\binom{2n+1}{2n-2}i^2=-\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}$．よって，求める和は $\frac{n(2n-1)}{3}$.