試験要項

- 試験日程：7 月 19 日 (水)
- 試験 A 試験時間：9:00〜9:50，試験 A 正答解説：9:50〜10:40
- 試験 B 試験時間：10:50〜11:40，試験 B 正答解説：11:40〜12:30
- 試験場：5303 番教室（授業と同じ場所）
- 受験資格：関数論 1 および関数論 1 演習を履修していること
- 出題範囲：複素数，複素関数，複素関数の微分，複素関数の積分（線積分およびコーシーの積分定理），級数（収束半径およびべき級数展開）
- 試験 A：計算問題（解答・採点は答えのみ）
- 試験 B：証明問題（定義，定理の証明含む）
- 資料持ち込み不可
- 単位はこの期末試験 100% で判定する
- 試験結果の統計データは公開する
- 所持品，学生証の取扱，遅刻および途中退室，再試験などその他の事項は明治大学の定期試験に準ずる

試験 A では以下の点を見る．

- 複素数の四則演算，絶対値や共役の計算，方程式を解く
- $\exp, \sin, \cos, \tan, \log$ や複素指数関数の計算
- 複素微分の計算
- コーシー・リーマンの関係式の利用
- 線積分の計算 (パラメタ表示，原始関数の利用，コーシーの積分定理の利用)
- 有理関数の部分分数分解
- 収束半径の計算
- 関数のべき級数展開

試験 B では以下の点や試験 A の範囲の応用力を見る．

- 複素関数，複素微分，複素関数の線積分，べき級数などの定義を理解しているか
- 代数学の基本定理の証明
- 微分可能性とコーシー・リーマンの関係性の同値性の証明
- コーシーの積分公式のグリーンの定理による証明
- べき級数の収束半径が定まることの証明
- べき級数の連続性，微分可能性，経路非依存性の証明

試験 A

答えのみ解答用紙に記入せよ．計算は計算用紙に行い，解答用紙には書かないこと．

注意．$\mathbb{R}$ は実数の集合を，$\mathbb{C}$ は複素数の集合を表す．虚数単位として i を使う．$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\overline{z}$ で z の共役複素数を表す．べき級数展開は $\sum$ を使って答えよ．

問題 1. $z = \overline{1+2i}$ のとき，$\dfrac{1}{z}$ を $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 2. $|e^{i\theta} - 1| = 2$ を満たす θ を求めよ．ただし，$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．

問題 3. $\tan i$ を $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 4. $(\sqrt{3} - i)^i$ を $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形で表わせ．

問題 5. $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ を複素微分せよ．

問題 6. $x, y \in \mathbb{R}$ とし，$z = x + iy$ とする．$f(z) = e^y \sin x + ie^y \cos x$ の複素導関数 $f'(z)$ を x, y の式で表せ．

問題 7. $f(z) = |z|^2$ とし，C を $z = 0$ から $z = 1+i$ までの線分とする．積分 $\int_C f(z)dz$ を求めよ．

問題 8. $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$ とし，C を円周 $|z| = 1$ 上を反時計回りに 1 周する曲線とする．積分 $\int_C f(z)dz$ を求めよ．

問題 9. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ とし，C を円周 $|z| = 2$ 上を反時計回りに 1 周する曲線とする．積分 $\int_C f(z)dz$ を求めよ．

問題 10. $f(z) = \dfrac{1}{1 - 3iz - 2z^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とべき級数展開したときの a_n を求めよ．また，その収束半径を求めよ．

解答

1 問 10 点，合計 100 点

(1) $\overline{z}$ を分母分子にかけて，有理化する．

$$\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{1+2i}{1^2+2^2}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

(2) オイラーの公式より，$|\cos\theta-1+i\sin\theta|=2$. 両辺 2 乗して絶対値をはずすと，$1-2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta=4$. これより $\cos\theta=-1$ なので，$\theta=\pi$. また，単位円と 1 の距離が 2 となる点は -1 だけであることからも分かる．

(3) $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ より，$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}(-i)$. よって，

$$\tan i=\frac{e^{-1}-e}{e^{-1}+e}(-i)=\frac{e-e^{-1}}{e+e^{-1}}i=\frac{e^2-1}{e^2+1}i.$$

(4) $\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=2e^{-\frac{\pi}{6}i}$ より，

$$(\sqrt{3}-i)^i=e^{(\log 2+(-\frac{\pi}{6}+2n\pi)i)i}=e^{\frac{\pi}{6}-2n\pi}\cos(\log 2)+e^{\frac{\pi}{6}-2n\pi}\sin(\log 2)i.$$

(5)

$$f'(z)=\frac{(z-i)'(z+i)-(z-i)(z+i)'}{(z+i)^2}=\frac{z+i-(z-i)}{(z+i)^2}=\frac{2i}{(z+i)^2}$$

(6)

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial x}=e^y\cos x-ie^y\sin x$$

または，$f(z)=ie^{-iz}$ なので，$f'(z)=e^{-iz}$ であることからも求まる．

(7) $z=(1+i)t,\ t:0\to 1$ とパラメタ表示すると，$|z|^2=2t^2$, $\frac{dz}{dt}=1+i$ より，

$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 2t^2(1+i)dt=\frac{2(1+i)}{3}.$$

(8) $\cos z=0$ となるのは $z=(\frac{1}{2}+n)\pi$ のときだけ．特に，$|z|\leq 1$ 内には零点は存在しない．よって，f は $|z|\leq 1$ 内で正則で，積分値は 0.

(9) $\frac{z}{z^2+1}=\frac{a}{z+i}+\frac{b}{z-i}$ とすると，$a=b=\frac{1}{2}$. $\pm i$ は境界 C を持つ領域内にあるので，

$$\int_C f(z)dz=\int_C\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\right)dz=\frac{1}{2}(2\pi i+2\pi i)=2\pi i.$$

(10) 部分分数分解すると，

$$\frac{1}{1-3iz-2z^2}=\frac{-1}{(2z+i)(z+i)}=\frac{2i}{2z+i}-\frac{i}{z+i}.$$

また，$\frac{2i}{2z+i}=\frac{2}{1-2iz}=\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}i^nz^n$ および，$\frac{i}{z+i}=\frac{1}{1-iz}=\sum_{n=0}^{\infty}i^nz^n$ なので，$a_n=(2^{n+1}-1)i^n$. 収束半径は $\frac{1}{2}$.

試験 B

問題 1. 複素関数 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に関して，$g(z)$ が $z = w$ で複素微分可能であることの定義を書け．

問題 2. 始点 α と終点 β を持つ曲線 C 上での，複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の線積分 $\int_C f(z)dz$ の定義を書け．

問題 3. 複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は点 z で微分可能であるとき，その点でコーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann equations) が成り立つことの証明を書け．

問題 4. 複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が単連結な領域 D 上で正則で，その導関数が連続であるとする．C を D 内の閉曲線として，f の C 上の周回積分は 0 になる．これをコーシーの積分定理 (Cauchy's integral theorem) という．グリーンの定理とコーシー・リーマンの関係式を使って，この証明を与えよ．

問題 5. 複素関数 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ がある領域 D で正則かつその導関数が $f'(z) = 0$ を満たすとする．このとき，f は領域 D で定数であることを証明せよ．

問題 6. 有理関数 $f(z) = \dfrac{cz + d}{z^2 + az + b}$ において，中心 0，半径を十分大きく取った円 C 上の周回積分が 0 となるための，a, b, c, d の条件を求めよ．

問題 7. べき級数で表現される複素関数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ に対して，$z = w$ で収束するならば，$|z| < |w|$ なる任意の z で絶対収束することを示せ．

解答

問 1-10 点，問 2-10 点，問 3-20 点，問 4-20 点，問 5-10 点，問 6-15 点，問 7-15 点，合計 100 点

問題 1. $\lim_{z\to w}\frac{g(z)-g(w)}{z-w}$ が存在すること．

問題 2. 曲線 C 上に $\alpha=z_0,z_1,z_2,\cdots,z_n=\beta$ を順に取る．$i=1,\cdots,n$ に対し $\Delta z_i=z_i-z_{i-1}$ とおく．その分割幅の最大 $\Delta=\max\{|\Delta z_i|\}$ を 0 に近づけたときの極限 $\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^n f(z_i)\Delta z_i$ が存在するとき，その極限を $\int_C f(z)dz$ と書く．

問題 3. $f=u+iv$ とすると，微小幅が実数である場合と，純虚数である場合が一致するので，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z+\Delta x)-f(z)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(z+\Delta yi)-f(y)}{\Delta yi}.$$

偏微分の式で書くと，

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

よって，$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$.

問題 4. $f=u+iv$ とすると，u,v の導関数は連続であるから，グリーンの定理より，

$$\begin{aligned}\int_C(u+iv)(dx+idy)&=\int_C((udx-vdy)+i(vdx+udy))\\&=\int_D(-u_y-v_x)dxdy+i\int_D(-v_y+u_x)dxdy.\end{aligned}$$

この被積分関数はコーシー・リーマンの関係式より 0．よって，積分値は 0.

問題 5. $f=u+iv$ とおくと，$f'=u_x+iv_x=0$ より $u_x=v_x=0$．コーシー・リーマンの関係式を使って，$u_y=v_y=0$．よって，u と v は定数.

問題 6. $z^2+az+b=0$ が異なる 2 つの解 α,β を持つ時は，

$$f(z)=\frac{p}{z-\alpha}+\frac{q}{z-\beta}=\frac{(p+q)z-p\beta-q\alpha}{z^a+az+b}$$

と書ける．半径を十分大きく取れば，内部の領域に α,β を含むので，その周回積分は $\int_C f(z)dz=2\pi i(p+q)$．これが 0 となるのは，$p+q=0$ となるときで，それは $c=0$ のとき．

$z^a+az+b=0$ が重解 α を持つときは，

$$f(z)=\frac{cz+d}{(z-\alpha)^2}=\frac{c}{z-\alpha}+\frac{c\alpha+d}{(z-\alpha)^2}$$

この周回積分は $\int_C f(z)dz=2\pi ic$．よって，$c=0$.

以上から周回積分が 0 となるための必要十分条件は $c=0$.

問題 7. $f(w)$ は収束するので，ある $M>0$ が存在してすべての n で $|a_nw^n|\le M$．よって，

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nz^n|=\sum_{n=0}^{\infty}|a_nw^n|\cdot|(z/w)^n|<\infty.$$