

**問題 1.** シミュレーションを行う目的として考えられることをいくつか挙げよ. その目的に関して, 計算機によるシミュレーションの利点を他の手法と比較して説明せよ.

解答例. シミュレーションを行う現象を理解および説明し, その現象に関わる未知の事柄を予測することにある. 計算機によるシミュレーションは, 実際の模型では実現が困難であるものや高額な費用がかかるものでも, 比較的 low コストで実現できることが多い. □

**問題 2.** 良いモデルとはどんなモデルであるかを論ぜよ.

解答例. 単純でシミュレーションが容易で現象を説明, 予測できるモデルが良いモデルである. □

**問題 3.** 良い疑似乱数が持つべき性質をいくつか挙げよ.

解答例. 計算の容易さ, 予測不可能性, 一様性など. □

**問題 4.** オイラー法とルンゲクッタ法の違いについて述べよ.

解答例. オイラー法は実装が単純であるが, 誤差が大きい. ルンゲクッタ法は実装に手間が掛かるが, 誤差を小さくできる. □

**問題 5.** 1次元拡散方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ) を数値計算で解く.  $u_j^n \sim u(j\Delta x, n\Delta t)$  として, 左辺を前進差分, 右辺を中心差分することで,

$$u_j^{n+1} = ru_{j-1}^n + (1 - 2r)u_j^n + u_{j+1}^n, \quad r = \frac{a^2 \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

が得られる.

- (1) 上式は  $u_j^n = g^n \exp(i\xi j \Delta x)$  という特解を持つことを示せ. この  $g$  を  $r$  と  $\xi$  の式で表せ. ここで,  $g^n$  は  $g$  の  $n$  乗を表し,  $i$  は虚数単位であり,  $\xi$  は任意の実数である.
- (2) 任意の  $\xi$  に対して  $|g| \leq 1$  となるための  $r$  の条件を求めよ.

解答例. 代入して,

$$g^{n+1} \exp(i\xi j \Delta x) = rg^n \exp(i\xi(j-1)\Delta x) + (1 - 2r)g^n \exp(i\xi j \Delta x) + rg^n \exp(i\xi(j+1)\Delta x)$$

より,

$$g = r \exp(-i\xi \Delta x) + 1 - 2r + r \exp(i\xi \Delta x) = 1 - 2r + 2r \cos(\xi \Delta x) = 1 - 4r \sin^2(\xi \Delta x / 2).$$

$|g| \leq 1$  となるためには,  $r \leq \frac{1}{2}$  であり, これは十分条件でもある.

□