明治大学理工学部 2015 年度春学期「確率・統計」期末試験解答　　　担当：宮部賢志

問題 1. (1) 離散的確率変数 X の期待値，分散の定義を書け．

(2) 連続的確率変数 X の期待値，分散の定義を書け．

(3) 確率論におけるチェビシェフの不等式を書け．

解答. (1) X の取りうる範囲が x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ (ただし $n = \infty$ の場合も許す) のとき，期待値 $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$ であり，分散 $V(X) = E((X - E(X))^2)$ である．

(2) X の確率密度関数を $f(x)$ としたときに，期待値 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$ であり，分散 $V(X) = E((X - E(X))^2)$ である．

(3) $P(|X - E(X)| \geq k\sigma(X)) \leq \frac{1}{k^2}$．ただし，$k$ は任意の正の実数．

□

配点：10 点, 10 点, 5 点

講評：$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ は減点した．式だけで文章になっていないものもあったが，読んで分かるように書くべきである．

問題 2. 箱の中に赤玉が 3 個，白玉が 5 個入っている．箱の中から玉を 1 個取り出し色を確認し，玉を戻さずに 2 個目の玉を取り出し色を確認する．

(1) 少なくとも 1 回は白玉を取り出す確率を求めよ．

(2) 2 回目が赤玉であった時，1 回目も赤玉であった確率を求めよ．

解答. (1) 2 回とも赤玉である確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} = \frac{3}{28}$ であるから，求める確率は $1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$

(2) 2 回目が赤玉であるという事象を A, 1 回目が赤玉であるという事象を B とする．$P(A) = P(B) = \frac{3}{8}$ である．また $P(A \cap B) = \frac{3}{28}$ である．よって，求める確率は $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{3/28}{3/8} = \frac{2}{7}$

□

配点：5 点, 10 点

問題 3. 1,2,3,4 の数字が等確率で出る 2 つの 2 つのサイコロを投げた時の目をそれぞれ X_1, X_2 とし，$Y = |X_1 - X_2|$ とする．Y の期待値，分散を求めよ．

解答. Y の確率分布表は以下のようになる．

Y	0	1	2	3
P(Y)	2/8	3/8	2/8	1/8

よって，期待値は，$E(Y) = \frac{1}{8}(3 + 4 + 3) = \frac{5}{4}$．また，分散は，$E(Y^2) = \frac{1}{8}(3 + 8 + 9) = \frac{5}{2}$ より，$V(Y) = \frac{5}{2} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{40 - 25}{16} = \frac{15}{16}$．

□

配点：10 点，5 点

問題 4. 公平なコインを繰り返し投げる．

(1) 6 回投げて，表が出る回数と裏が出る回数が同じとなる確率を求めよ．

(2) 10000 回投げて表が出る回数の期待値と標準偏差を求めよ．

(3) 10000 回投げて表が出る回数が 4900 から 5100 の間にある確率を，正規分布近似 (半数補正付き) を用いて評価せよ．

解答. (1) ${}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{5}{16}$

(2) 期待値は $10000 \times \frac{1}{2} = 5000$，標準偏差は $\sqrt{10000 \times 1/2 \times 1/2} = 50$

(3) 表が出る回数 X は二項分布 $B(10000, 1/2)$ に従う．この分布における $P(4900 \leq X \leq 5100)$ の値を求めたい．

$$\frac{4900 - 0.5 - 5000}{\sqrt{100000/4}} = \frac{-100.5}{50} = -2.01, \qquad \frac{5100 + 0.5 - 5000}{\sqrt{100000/4}} = 2.01$$

であるから，求める確率は $N(0,1)$ における $P(-2.01 \leq X \leq 2.01)$ に近い．正規分布表から $\phi(2.01) = 0.4778$ なので，求める確率は 0.9556

□

配点：5 点 × 2, 15 点

講評：(2) で直接計算で求めようとしている人がいたがそれは大変．独立性をうまく使う．(3) でチェビシェフの不等式での評価は 0 点とした．

問題 5. ある 60 人のクラスで数学と英語のテストを行ったところ，数学の平均点が 50 点，標準偏差が 15 点であり，英語の平均点が 60 点，標準偏差が 18 点であった．また数学と英語の点数の共分散は 180 であった．

(1) 数学と英語の点数の相関係数を求めよ．

(2) 数学の点数を説明変数 x，英語の点数を被説明変数 y と見た時の回帰直線を求めよ．

解答. (1) $r = \frac{180}{15 \cdot 18} = 0.667$

(2) 傾きが $\frac{180}{15^2} = 0.8$ で，$(50, 60)$ を通るから，$y = 0.8(x - 50) + 60 = 0.8x + 20$

□

配点：5 点 × 2

問題 6. サイコロを繰り返し振って 1 から 6 までの全種類の目が出るまでの回数の期待値を求めよ．

解答. $k-1$ 種類出ている状態で k 種類目が出る確率は，$1 - \frac{k-1}{6} = \frac{7-k}{6}$．それが初めて起こるまでの回数の期待値は，幾何分布の期待値であるから，$\frac{6}{7-k}$ よって，求める期待値は，

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{6}{7-k} = 6 \times (\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1) = 6 \times \frac{1}{120}(20 + 24 + 30 + 40 + 60 + 120) = \frac{294}{20} = 14.7$$

□

配点：5 点

問題 7. 確率変数 X が一様分布 $U(0,1)$ に従う時，X^2 の確率密度関数，期待値，分散を求めよ．

解答. $0 \le x \le 1$ として，$P(0 \le X^2 \le x) = P(0 \le X \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}$ より，これを微分して，$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ただし，$0 \le x \le 1$. それ以外の部分では，$f_{X^2}(x) = 0$.

期待値は $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}$ であり，分散は $E(X^2) = \displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{5}$ より $V(X^2) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{45}$ □

配点：5 点

講評：密度関数がもとまらなくても，$E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx$ で求めても答えは合う．この場合は 2 点加点した.