明治大学　2014 年度春学期　月 5 限確率　6 月 16 日　中間テスト

問題 1 (条件付き確率)**.** あるネジ工場にはネジをつくる機械 3 台，A, B, C があり，それぞれ全体の $50\%, 30\%, 20\%$ を生産している．A, B, C の各機械でつくるネジのうち $2\%, 3\%, 4\%$ が不良品である．今，製品全体の中から 1 個のネジを取り出すと，それは不良品であった．それが A で生産されたものである確率を求めよ．

解答. 取り出したネジが A, B, C の各機械でつくられたという事象をそれぞれ A, B, C, 取り出したネジが不良品であるという事象を D とすると，

$P(A) = 0.5,\ P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.2,\ P(D|A) = 0.02,\ P(D|B) = 0.03,\ P(D|C) = 0.04$

である．よって，

$$P(D) = 0.5 \times 0.02 + 0.3 \times 0.03 + 0.2 \times 0.04 = 0.027$$

これから，

$$P(A|D) = \frac{P(A)P(D|A)}{P(D)} = \frac{0.5 \times 0.02}{0.027} = \frac{10}{27}$$

□

問題 2 (期待値・分散・標準偏差)**.** 確率変数 X の確率分布が，

$$P(X = 1) = \frac{1}{2},\ P(X = 2) = \frac{1}{3},\ P(X = 3) = k$$

で与えられているとする．$k,\ E(X),\ V(X),\ \sigma(X)$，および $\begin{cases} E(aX + b) = 0 \\ V(aX + b) = 1 \end{cases}$ を満たす a, b を求めよ．ただし，$a > 0$ とする．

解答. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + k = 1$ より $k = \frac{1}{6}$．$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$．また，$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{3}$ であるから，$V(X) = \frac{10}{3} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$ さらに，$a \cdot \frac{5}{3} + b = 0,\ a^2 \cdot \frac{5}{9} = 1$ を解いて，$a = \frac{3}{\sqrt{5}},\ b = -\sqrt{5}$ □

問題 3 (チェビシェフの不等式)**.** 100 点満点で 1 点きざみの試験を行ったところ，受験者が 48 名，平均値が 57.6 点，標準偏差が 12.5 点であった．得点が 33 点から 82 点の間にある受験者は何人より多いか？

解答. チェビシェフの不等式から，$P(|X - 57.6| \geq 2 \times 12.5) \leq \frac{1}{4}$ より，$P(32.6 < X < 82.6) > \frac{3}{4}$ よって，$48 \times \frac{3}{4} = 36$ □

問題 4 (相関係数)**.** 確率変数 X, Y に対して,

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

を X と Y の相関係数という．確率変数 X に対して,

$$\tilde{X} = \frac{X - E(X)}{\sqrt{V(X)}}$$

を X の標準化と呼ぶ.

(1) 任意の確率変数 X, Y に対して，$\rho(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \mathrm{Cov}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E(\tilde{X}\tilde{Y})$ であることを示せ.

(2) 任意の確率変数 X, Y に対して，$\rho(X,Y) = \rho(\tilde{X}, \tilde{Y})$ を示せ.

(3) 任意の実数 t に対して $E((tX+Y)^2) \geq 0$ であることを利用して，$-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ を示せ.

解答. (1) 任意の確率変数 X に対して，$E(\tilde{X}) = 0$, $V(\tilde{X}) = 1$ であることから，定義に代入して題意の式を得る.

(2)

$$\rho(\tilde{X}, \tilde{Y}) = E(\tilde{X}\tilde{Y}) = \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \rho(X,Y)$$

(3) (2) より X, Y は標準化されているとしてよい．$E((tX+Y)^2) \geq 0$ より,

$$E(X^2)t^2 + 2E(XY)t + E(Y^2) \geq 0$$

X, Y が標準化されているので，$E(X^2) = E(Y^2) = 1$, $E(XY) = \rho(X,Y)$ より,

$$t^2 + 2\rho(X,Y)t + 1 \geq 0$$

これが任意の t につて成立するから,

$$\rho(X,Y)^2 - 1 \leq 0$$

□