問題 1. 以下の言葉の定義を書け．

(1) 補集合
(2) 排反事象
(3) ${}_nC_k$ もしくは $\binom{n}{k}$
(4) ポアソン分布
(5) 確率密度関数

解答．　(1) X を全体集合として，A の補集合とは，X の元で A に含まれない元の集合のこと．
(2) 事象 A と B が排反であるとは，A と B が同時には起こらないこと．
(3) ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ であり，n 個から k 個を取り出す組み合わせの数．
(4) X のとりうる値の集合が $\{0, 1, 2, \cdots, k, \cdots\}$ であって，正の定数 a に対し，$P(X = k) = a^k e^{-a}/k!$ となる確率分布．
(5) 確率変数 X に対して $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ を満たす関数 $f(x)$ を，X の確率密度関数という．

□

問題 2. 2 つのサイコロを投げたとき，異なる目が出る事象を A，少なくとも 1 つは 1 の目である事象を B とする．

(1) A が起こる確率を求めよ．
(2) B が起こる確率を求めよ．
(3) A と B が同時に起こる確率を求めよ．
(4) B が起こったときに A が起こる条件付き確率を求めよ．

解答．　(1) 同じ目が出る確率は $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ なので，$P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
(2) 共に 1 ではない確率は $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$ なので，$P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$
(3) A, B が同時に起こる場合は，$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)$ の 10 通りなので，$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
(4) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{10/36}{11/36} = \frac{10}{11}$

□

問題 3. 確率変数 X の確率分布が，$P(X = -1) = \frac{1}{3}$，$P(X = 0) = \frac{1}{6}$，$P(X = 2) = \frac{1}{2}$ で与えられているとする．X の期待値，分散，標準偏差を求めよ．

解答．$E(X) = -\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. $E(X^2) = \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{3}$. $V(X) = \frac{7}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}$. $\sigma(X) = \frac{\sqrt{17}}{3}$.　□

問題 4. 100 点満点で 1 点きざみの試験を行ったところ，受験者が 54 名，平均値が 62.3 点，標準偏差が 8.7 点であった．得点が 36 点から 89 点の間にある受験者は何人より多いか？

解答．$\lambda = 3$ でチェビシェフの不等式を適用して，$54 \times \frac{8}{9} = 48$　□

問題 5. 連続的確率変数 X の確率密度関数が $f(x) = ae^{-x/\pi}$ であるとする．

(1) a の値を求めよ．

(2) X の期待値，分散を求めよ．

(3) 確率変数 $3X+4$ の確率密度関数を求めよ．

解答． (1) $a = \frac{1}{\pi}$

(2) $E(X) = \pi$, $V(X) = \pi^2$

(3) $\frac{1}{3} f((x-4)/3) = \frac{e^{-\frac{x-4}{3\pi}}}{3\pi}$.

□

問題 6. コインを 100 回投げた時，表が出る相対頻度が 0.48 から 0.52 の間にある確率を，以下の事実を使って評価せよ．

> 正規分布近似．n が大きい時，$B(n,p)$ における $P(a \leq X \leq b)$ は，$N(0,1)$ における $P((a-0.5-np)/\sqrt{np(1-p)} \leq X \leq (b+0.5-np)/\sqrt{np(1-p)})$ に近い．

解答．$n = 100$, $p = 1/2$, $a = 50-2$, $b = 50+2$, $\sqrt{np(1-p)} = 5$ より，$N(0,1)$ における $P(-0.5 \leq X \leq 0.5)$ に近い．つまり，$2 \times \phi(0.5) = 2 \times 0.1915 = 0.383$ □