明治大学　2014 年度春学期　月 3 限線形代数学 1　6 月 16 日　中間テスト　解答

問題 1 (定義)**.** 次の言葉の定義を書きなさい．

(1) 正則行列，*(2)* 対称行列，*(3)* 基底

解答．　(1) 正方行列で逆行列が存在する行列

(2) 行と列を取り替えても変わらない行列．${}^tA = A$ を満たす行列．

(3) ベクトル空間 W において，ベクトル $a_1, \cdots, a_r$ が基底であるとは，$a_1, \cdots, a_r$ が一次独立で，W の任意の元が $a_1, \cdots, a_r$ の 1 次結合で書けることを言う．

□

問題 2 (固有値・固有ベクトル・固有空間・対角化)**.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) A の固有多項式を求めよ．

(2) A の固有値とそれぞれの重複度を求めよ．

(3) A の重複度が 1 の固有値に対する固有空間を求めよ．

(4) A を対角化した対角行列を求めよ．ただし，対角成分は絶対値の小さい順に並べよ．

(5) A を対角化するユニタリ行列 T を求めよ．ただし，T の $(3,1)$ 成分は 0 となるようにせよ．

解答．　(1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(t) =&|tI - A| = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 2-x \\ -1 & x-3 & -1 \\ -1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} \\ =&\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x-3 & -2 \\ -1 & -1 & x-4 \end{vmatrix} \\ =&(x-2)((x-3)(x-4) - (-1)\cdot(-2)) = (x-2)^2(x-5)\end{aligned}$$

(2) 固有値は 2(重複度 2) と 5

(3) 求めるものは $W(5)$．$(5I - A)v = 0$ を解くと，$x = y = z$ より，

$$W(5) = \{c\,{}^t(1,1,1) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(5) $W(2)$ を求めると，$x+y+z=0$．この部分空間の基底として，$z=0$ となるものを含むように，かつ直交するように取れば，

$${}^t(1,-1,0),\ {}^t(1,1,-2)$$

これを正規化したものを並べて，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(注意：別解多数有り) □

問題 3 (論証)**.** λ が正則行列 A の固有値ならば $\lambda \neq 0$ であり，λ^{-1} は A^{-1} の固有値であることを示せ．

解答. A の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすると，固有方程式は $\Phi_A(t) = (t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n)$．よって，$\Phi_A(0) = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$．一方，固有多項式の定義より，

$$\Phi_A(0) = |0I - A| = |-A| = (-1)^n |A|$$

A が正則ならば，$|A| \neq 0$ なので，$\lambda_i \neq 0$

λ が A の固有値であるから，$|\lambda I - A| = 0$．これに $|\lambda^{-1}A^{-1}|$ をかけると，

$$|\lambda^{-1}A^{-1}||\lambda I - A| = |\lambda^{-1}A^{-1}(\lambda I - A)| = |A^{-1} - \lambda^{-1}I| = 0$$

よって，$|\lambda^{-1}I - A^{-1}| = 0$．すなわち，$\lambda^{-1}$ は A^{-1} の固有値である． □

問題 4 (論証)**.** エルミート行列の固有値は実数であることを示せ．

解答. A をエルミート行列とし，λ を A の固有値，x を A の λ に対する固有ベクトルとする．この時，

$$(Ax, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x),$$

$$(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax) = (x, \lambda x) = \overline{\lambda}(x, x)$$

が成り立つ．$(x, x) = ||x|| > 0$ より，$\lambda = \overline{\lambda}$．すなわち，$\lambda$ は実数である． □