問題 1. 行列 $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ を考える.

(1) A の固有多項式を求めよ.

(2) A の固有値とそれぞれの重複度を求めよ.

(3) A の重複度が 1 の固有値に対する固有空間を求めよ.

(4) A を対角化した行列を求めよ．ただし，対角成分は絶対値の小さい順に並べよ.

(5) A を対角化する直交行列 T を求めよ．ただし，T の $(3,1)$ 成分は 0 となるようにせよ.

解答.　(1)

$$\begin{aligned}\Phi_A(x) =& |xI - A| = \begin{vmatrix} x-4 & 1 & -1 \\ 1 & x-4 & 1 \\ -1 & 1 & x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & x-3 & 0 \\ 1 & x-4 & 1 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} \\ =& (x-3)^2(x-4) - 2(x-3)^2 = (x-3)^2(x-6)\end{aligned}$$

(2) $\Phi_A(x) = 0$ を解いて，3(重複度 2)，6(重複度 1)

(3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O$$

を解いて，$x + y = 0$, $y + z = 0$ より，

$$W(6) = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; k \in \mathbb{R} \right\}.$$

(4) 固有値を並べて

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(5) まず $W(3)$ の基底を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O$$

と $z = 0$ の条件から，$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は，A の固有値 3 に対する固有ベクトルの 1 つである．このベクトルと直交し，$x - y + z = 0$ を満たすベクトルとして，$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ がある．これらを正規化して順番に並べて，

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

は答えの1例である．

□

問題 2. n 次正方行列 A について次の3つの条件は同値である．

(a) $A^r = O$ となる自然数 r が存在する．
(b) A の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ はすべて0である．
(c) $A^n = O$.

次の問いに答えよ．

(1) (a)⇒(b) をフロベニウスの定理を使って示せ．
(2) (b)⇒(c) をハミルトンケイリーの定理を使って示せ．

解答. (1) フロベニウスの定理より A^r の固有値は $\lambda_1^r, \lambda_2^r, \cdots, \lambda_n^r$ である．ところで，O の固有値はすべて0であり，$A^r = O$ であるから，すべての i で $\lambda_i^r = 0$ である．すなわち，$\lambda_i = 0$.

(2) A の固有値がすべて0であることから，A の固有多項式は $\Phi_A(x) = x^n$ である．ハミルトンケイリーの定理より，$\Phi_A(A) = A^n = O$.

□

問題 3.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

とする．

(1) 2次形式 F の符号を求めよ．
(2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ のときの F の最大値と最小値を求めよ．

解答. (1)

$$\begin{aligned} F =& (x_3 + \frac{x_1 + x_2}{2})^2 - (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ =& (x_3 + \frac{x_1 + x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{3}{2}x_1x_2 \\ =& (x_3 + \frac{x_1 + x_2}{2})^2 + \frac{3}{4}(x_2 - x_1)^2 - x_1^2. \end{aligned}$$

よって，符号は $(2, 1)$

(2) $2F$ の係数行列 A は $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ であり，その固有多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_A(x) =& \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & x-2 & -1 \\ -1 & -1 & x-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & -x+3 & 0 \\ 1 & x-2 & -1 \\ 0 & x-3 & x-3 \end{vmatrix} \\ =& (x-1)(x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-3)^2 \\ =& (x-3)(x^2 - 3x + 2 + x - 1 + x - 3) \\ =& (x-3)(x^2 - x - 2) = (x+1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

これより，$2F$ の最大値は3，最小値は -1 なので，F の最大値は $3/2$，最小値は $-1/2$ である． □