明治大学　2014 年度秋学期　月 5 限微分方程式　期末テスト　解答・解説

問題 1. 次の説明が当てはまる語句を以下の語群から選び，記号で回答せよ．

(1) 微分方程式に本質的に表れる未知関数の微分回数の最大値
(2) $y' = f(x, y)$ の形の微分方程式
(3) $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ の形の微分方程式
(4) $y' = f(x)g(y)$ の形の微分方程式
(5) 定数係数 2 階線形微分方程式 $py'' + qy' + ry = 0$ において，$px^2 + qx + r = 0$ の解

語群
(a) 常微分方程式　(b) 偏微分方程式　(c) 階数　(d) 正規型　(e) 同次形
(f) 変数分離形　(g) ベルヌーイの微分方程式　(h) リッカチの微分方程式
(i) 特性方程式　(j) 特性根　(k) 連立微分方程式

解答.　(1) (c)
(2) (d)
(3) (e)
(4) (f)
(5) (j)

□

配点は各 5 点× 5 問．
(2) の正答率が思ったよりも低かった．(a) も間違いではないが，この文脈ではやはり (d) を答えるのが適切である．

問題 2. 以下の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$
(2) $y' + 2xy = 4x$
(3) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$
(4) $y'' + 2y' + 2y = 5\cos x$
(5) $y' - e^{-x}y^2 + y - e^x = 0$

解答.　(1) $y' = -\frac{x}{y}$ より，$y\ dy = -x\ dx$ を積分して，$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$．よって，$x^2 + y^2 = C'$．

(2) まず同次形 $y' + 2xy = 0$ を解く．$\frac{dy}{y} = -2x\ dx$ という変数分離形と見てこれを積分すると，$\log|y| = -x^2 + C$ より $y = C'e^{-x^2}$．次に定数変化法で $y = C(x)e^{-x^2}$ とおいて，与えられた式に代入すると，$-2xC(x)e^{-x^2} + C'(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 4x$ より $C(x) = \int 4xe^{x^2}dx = 2e^{x^2} + C$．よって，$y = 2 + Ce^{-x^2}$．

(3) 特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ より，特性根は $\lambda = 1, 2$．特殊解の候補として，$y = ae^{3x}$ とおくと，$y' = 3a3^{3x}$, $y'' = 9ae^{3x}$ より，これらを与えられた式に代入して，$9a - 9a + 2a = 1$ で，$a = \frac{1}{2}$．すなわち，求める一般解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{3x}$.

(4) 特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ より，特性根は $\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$. 特殊解の候補として，$y = a\cos x + b\cos x$ とおいて，与えられた式に代入すると，$a = 1, b = 2$ となる．よって，求める一般解は $y = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x) + \cos x + 2\sin x$.

(5) $y = e^x$ が 1 つの解であることから，$y = e^x + \frac{1}{u}$ とおいて，与えられた式に代入すると $u' + u = -e^{-x}$ となる．これを解いて，$u = e^{-x}(-x + c)$ より，$y = e^x - \frac{e^x}{x+c}$.

□

配点は各 15 点× 5 問．方針が立てられていないものは 0 点とした．部分点の基準は以下を参照.

(1) 変数分離形で積分の形まで求まっていれば 5 点．$y = \pm\sqrt{C - x^2}$ の形でも良い．ただし，$y = \sqrt{C - x^2}$ とした場合は -5 点.

(2) $\log|y|$ の絶対値がない，$\int 4xe^{x^2}$ の積分がおかしい，などの解答が目立った．ちなみに $y = 2$ は $C = 0$ の場合なので別に書く必要はない．同次形の解が出ていれば 5 点.

(3) なぜか求める一般解を $y = axe^{3x}$ と置く解答が見られた．特性根が出ていれば 5 点．特殊解の計算ミスは -5 点.

(4) 特性根が $-1 \pm 2i$ となっている解答が多く見られた．一般解で e^{-x} が抜けていたり，$\cos(\pm ix)$ などの誤答が見られた．$\cos x$ と $\sin x$ で整理しても良いが，上の形の方が見やすいと思う．特性根が出ていれば 5 点．特殊解の計算ミスは -5 点.

(5) $y = e^x + \frac{1}{u}$ と置いていれば 5 点.