明治大学　2014 年度秋学期　水 4 限数値計算の基礎 1　期末テスト　解答・解説

問題 1. 次の説明が当てはまる語句を以下の語群から選び，記号で回答せよ．

(1) 真の値 x と近似値 x' に対して，$\Delta x = x' - x$ としたときの $\frac{|\Delta x|}{|x|}$

(2) 実数 x を $(-1)^b \times (f_0.f_1 f_2 \cdots f_k)_\beta \times \beta^e$ の形で表現する方法.

(3) $\int_a^b f(x)\,dx$ の $\frac{h}{3}\left(y_0 + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_{2n}\right)$ での近似式．ここで，$h = \frac{b-a}{n}$ で, $x_0, \cdots, x_n$ を $[a,b]$ を n 等分する点として $y_i = f(x_i)$.

(4) ある $L \in [0,1)$ に対して，すべての $x, y \in X$ について，$||f(x) - f(y)|| \leq L||x-y||$ を満たす写像 $f : X \to X$ のこと

(5) 反復計算において収束判定用の定数 ϵ を与えて $\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_{n-1}|} < \epsilon$ を満たしたら収束したとみなす考え方

(6) 計算機上で大きな数と小さな数の加算において，小さな数が無視される現象

(7) 計算機上において $1 + \epsilon > 1$ を満たす最小の浮動小数点数

(8) 正方行列 A に対し，下三角行列 L と上三角行列 U を使って $A = LU$ と表現すること

(9) 実ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n)$ に対して，$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ のこと

(10) 正方行列 A の固有値の絶対値の最大値

語群

(a) 浮動小数点表示　(b) 桁落ち　(c) 情報落ち　(d) 絶対誤差　(e) 相対誤差

(f) 有効数字　(g) スペクトル半径　(h) 条件数　(i) ピボット選択　(j) LU 分解

(k) 2 分法　(l) ニュートン法　(m) 残差基準の判定　(n) 誤差基準の判定

(o) マシンイプシロン　(p) l_2 ノルム　(q) l_1 ノルム　(r) l_∞ ノルム

(s) 縮小写像　(t) ヤコビ法　(u) ラグランジュの補間法　(v) シンプソンの公式

(w) エルミート補間　(x) ルジャンドル多項式　(y) ガウス積分　(z) 区間演算

解答.　(1) (e)

(2) (a)

(3) (v)

(4) (s)

(5) (n)

(6) (c)

(7) (o)

(8) (j)

(9) (r)

(10) (g)

□

配点は各 5 点 ×10 問．(3) が予想以上に点数が悪かったが，シンプソンの公式の説明で

ある．

問題 2. 以下の事柄について，数値計算の知識のない数学科の学生に分かるように説明せよ．

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，解の公式 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ で根を計算すると誤差が大きくなることがある．何故か．

(2) ガウスの消去法において，ピボット選択を行うのは何故か．

(3) ニュートン法は 2 分法に比べて収束が早い．何故か．

(4) 相異なる x_0 から x_n に対して，関数値 f_0 から f_n と微係数 f'_0 から f'_n が一致するような $2n+1$ 次の多項式は，ルジャンドル多項式 $l_k(x)$ を使って，$p_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^n f_k h_k(x)+\sum_{k=0}^n f'_k g_k(x)$, $h_k=\{l_k(x)\}^2\{1-2(x-x_k)l'_k(x_k)\}$, $g_k=(x-x_k)\{l_k(x)\}^2$ と唯一に決まる．何故か．

解答． (1) $|b|\gg ac$ ($|b|$ が ac と比べてはるかに大きい) である場合，$\sqrt{b^2-4ac}\approx|b|$ ($\approx$ は「だいたい同じ」を表す) なので，$-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$ の計算において，非常に近い数の減算を行うことになる．このような計算を計算機で行う場合，桁落ちと呼ばれる現象が起き，有効数字が小さくなり，結果として誤差が大きくなる．

ここで桁落ちとは，例えば有効数字 10 桁で $1.23456789-1.23456766$ という計算を行うと，0.00000023 となり，有効数字が 2 桁となる．このように非常に近い数の減算において，有効数字が落ちる現象を言う．

(2) まず線形代数で習うガウスの消去法を思い出しておく．例えば $3x+2y=1$, $2x+3y=4$ の連立一次方程式において，x の係数を 1 つの方程式を除いて 0 にしたい場合，2 つ目の式の 3/2 倍を 1 つ目の式から引く，などの操作を行う．ここで 2 で割るという操作が必要になるが，これを計算機で実装する場合，2 つの問題が起こる．1 つは 0 が出てくる場合の処理である．もう 1 つは誤差の問題で，小さな数で割ると出てくる結果の誤差が大きくなることがある．これらの問題に対処するために，ピボット選択と呼ばれる方法が使われる．ピボット選択とは，割る数の絶対値ができるだけ大きくなるように選択するというものである．例えばこの場合，2 と 3 を比較して，3 で割るように式の順番を入れ替えることである．

(3) $f(x)=0$ の根を求める方法として，2 分法やニュートン法と呼ばれる方法がある．

2 分法では，根の存在する区間 $[a,b]$ から始めて，$c=(a+b)/2$ に対する $f(c)$ の符合により，$[a,c]$ もしくは $[c,b]$ に根が存在することが分かる．これを繰り返すことで根の近似値を求める．根が存在する区間の幅は常に 1/2 になることに注意しよう．

ニュートン法は適当な初期値 x_0 から始めて，$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ により次の近似値を求める．この場合，真の値を α とすると，$|x_{n+1}-\alpha|=O(|x_n-\alpha|^2)$ が成り立つことが知られている．これを 2 次収束するという．これはある程度良い近似値が得られれば，次の近似値は非常に良い近似であることを意味している．

上の式は，$g(x)=\frac{f(x)}{f'(x)}$ とおいて，$x=\alpha$ でテーラー展開すると，$g(\alpha)=0$, $g'(\alpha)=1$

より，$g(x) = (x-\alpha) + g'(\alpha)((x-\alpha)^2)$ なので，$|x_{n+1} - \alpha| = |x_n - g(x_n) - \alpha| = O(|x_n - \alpha|^2)$ から分かる．

(4) まず $p_{2n+1}(x)$ が条件を満たすことを確認する．$h_k(x_i) = \delta_{ki}$，$g_k(x_i) = 0$ より，$p_{2n+1}(x_i) = f_i$．さらに，$h'_k(x) = 2l_k(x)l'_k(x)\{1 - 2(x - x_k)l'_k(x_k)\} + \{l_k(x)\}^2\{-2l'_k(x_k)\}$ より，$h'_k(x_i) = 0$．$g'_k(x) = \{l_k(x)\}^2 + 2(x - x_k)l_k(x)l'_k(x)$ より $g'_k(x_i) = \delta_{ki}$．これらから，$p'_{2n+1}(x_i) = f'_i$ となり，条件を満たすことが分かる．
次に唯一であることを示そう．異なる $w(x)$ も条件を満たしたとして，$a(x) = p_{2n+1}(x) - w(x)$ が恒等的に 0 ではないとする．$a(x_i) = 0$ であることから，$a(x)$ は $(x - x_i)$ で割り切れる．$a'(x_i) = p'_{2n+1}(x_i) - w'(x_i) = 0$ であることから，$a(x)$ は $(x - x_i)^2$ で割り切れる．すなわち，$a(x)$ は $\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^2$ という $2n+2$ 次式で割り切れる．ところが，p, w は $2n+1$ 次式なので，a は高々 $2n+1$ 次式である．これは矛盾である．すなわち，$a(x)$ は恒等的に 0 であり，p_{2n+1} は条件を満たす唯一の式であることが分かる．

□

配点は (1)(2) はそれぞれ 15 点，(3)(4) はそれぞれ 10 点.

(1) $b^2 - 4ac$ の計算において情報落ちが起きるという解答もあり，それも可とした．桁落ちもしくは情報落ちが原因で誤差が大きくなることを説明していれば 10 点．桁落ちもしくは情報落ちの説明をしていれば 5 点.

(2)「0 で割る」もしくは「小さな数で割ると誤差が大きくなる」のどちらかが説明されていれば 10 点．2 つとも説明されていれば 15 点.

(3) 2 分法やニュートン法の説明で 5 点．2 次収束の説明があれば 5 点.

(4) 条件を満たすことを示していれば 5 点．唯一であることを示していれば 5 点.