2013 年度　早稲田大学　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　補講レポート誤解答例

基礎問題

問題 1. (x, y) が円板 $x^2 + y^2 \leq 5$ 内を動くとき,

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

の最小値を求めよ.

[見落とし] 最小値の候補は極値もしくは" 端" です.

$x^2 + y^2 < 5$ での極値と, $x^2 + y^2 = 5$ での最小値を比較する必要があります.

[推奨] 2 変数関数と見て極値を求める方法を使ってください.

問題 2. 極座標で方程式

$$r = 1 - \cos\theta$$

により与えられた曲線がある. この曲線で囲まれる領域の上で,

$$f(x, y) = x^2$$

の積分が

$$\frac{49\pi}{32}$$

であることを確かめよ.

[推奨] 図を書きましょう!

標準問題

問題 3. 極座標を用いて

$$r^2 = \cos 2\theta$$

により定義される曲線の概形を書け. また主要な点の座標を付記せよ.

[説明不足] θ の範囲に $0 \leq \theta < 2\pi$ を仮定する.

θ には範囲はありませんから, 実数全体を動きます. しかしこの問題の場合, cos の周期性から, $0 \leq \theta < 2\pi$ を仮定できます. しかし, その説明が必要です.

[説明不足] y が最大最小になる場所の点の座標を書きましょう．

何が主要な点かは難しいですが，y が最小になる点は主要な点だと思います．

[説明不足] $r = 0$ の場合を考慮してください．

[推奨] 計算が楽な方法を選びましょう．

$\dfrac{dy}{dx}$ よりも $\dfrac{dy}{d\theta}$ を計算するほうが楽でしょう．

問題 **4.** $x > 0$ に対して，

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$x > 0$, $y > 0$ に対して，

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

とする．以下の事実を確認せよ．

(i) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
(ii) $\Gamma(1) = 1$
(iii) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

[参考] $\lim_{a\to\infty} \dfrac{a^x}{e^a} = 0$ の導き方について．

まず，分子は多項式 (のようなもの) で，分母は指数関数ですから，発散の速度を考えれば，明らかです．この証明を書く必要はないと思います．

しかし，書く場合には，以下の様な求め方が楽だと思います．$x < n$ となる自然数 n をとる．

$$e^a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} > \frac{a^n}{n!}.$$

よって，

$$\frac{a^x}{e^a} < a^{x-n} n! \to 0.$$

[参考] (iii) について，主に方針は 2 通りあったようです．

1 つは，$\Gamma(x)\Gamma(y)$ の値を持つ重積分を，

$$u = \frac{t}{t+s},\ v = t + s$$

で変換するパターン．もう 1 つは，$\Gamma(x)$ を $t=s^2$ で置換し，$\Gamma(x)\Gamma(y)$ を極座標変換し，最後に形をあわせるというパターン．いづれも重積分をどのように変数変換するかがポイントですが，$x+y$ という形に着目するか，よく使われる極座標に着目するか，で 2 通りに分かれそうです．

[間違い] x, y は整数だと仮定する．

講義で話したように，Γ 関数は階乗の実数への拡張ですから，x, y が整数だと仮定するなら，意味がありません．

$\boxed{\text{応用問題}}$

問題 5. n 次元超球 $x_1^2+\cdots+x_n^2 \leq 1$ の体積 V_n を以下の *2* つの方法で求めよ．

(i) $V_n = 2V_{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$ を導き，帰納法により．

(ii) $D_n = \{X_1 \geq 0, \cdots, X_n \geq 0, X_1+\cdots+X_n \leq 1\}$ として，

$$V_n = \int_{D_n} X_1^{-1/2} \cdots X_n^{-1/2} dX_1 \cdots dX_n$$

を導いた後，$Y_n = \dfrac{X_n}{1-X_1\cdots-X_{n-1}}$ で変換し，帰納法により．

問題 6. 正の実数上で，対数凸，$f(x+1)=xf(x)$, $f(1)=1$ である関数は，ガンマ関数に限ることを示せ．