2013 年度　早稲田大学　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　補講レポート誤解答例

標準問題

問題 4. e は無理数であることを示せ.

[不自然な例] $e = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ を e^x の Taylor 展開から導出する.

「e の定義から」とするほうが自然です.

[誤り例] $e = \dfrac{a}{b}$ と置いた時に，$b \geq 2$ を仮定する.

「e は自然数ではない」ということをここでは使うべきではないでしょう．同じ理由で $e < 3$ を使うのも良くないと思われます.

[誤り例] $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots < 1$

ここは真に $=$ です.

[不自然な例] e が無理数であることを背理法で証明する.

実数 a が無理数であるとは，a が有理数でないことを言います．性質 P に対して「P でない」とは，P が成り立たないことを言います．ですから，e が有理数でないことを示せば，無理数であることが示せたことになります．ここには背理法は要りません.

何か「矛盾」を示す際には，「P であること」と「P でないこと」を示すことで，矛盾を導きます．自分の証明の中で P は何に当たるのか意識しながら書きましょう.

問題 5.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数であるが，解析関数ではないことを示せ.

[誤り例] $x \leq 0$ で $f(x) = 0$ なので，$x \leq 0$ で $f^{(n)}(x) = 0$

$x = 0$ での微分可能性は $x > 0$ の値にもよるので，「$x < 0$ で $f^{(n)}(x) = 0$」しか導けません．これに関連してか，$x > 0$ のところで C^∞ 級を確かめただけで，f は C^∞ 級と結論している人も多くありました．$x = 0$ が問題だということが理解できていなかったようです.

f が実解析関数でないことを示すのに，$x=0$ での Taylor 展開を考えている人が多かったです．それは小平本 p147 にそう書いてあるからなのでしょう．しかしその後の p149 には次のような定理が出てきます．

定理 $f(x), g(x)$ を共にある開区間 I で定義された実解析関数とする．I に属する 1 つの点 a の 1 つの近傍において $f(x)$ と $g(x)$ が一致するならば，区間 I 全体で $f(x)$ と $g(x)$ は一致する．

そこで $g(x)=0$ を考えると，例えば，$a=-1$ の近傍 $(-2,0)$ で $f(x)$ と $g(x)$ は一致していますから，f が実解析関数なら $\mathbb{R}$ 全体で一致しなければなりませんが，これは矛盾します．

解答として書くならこちらが自然ではないでしょうか．

> [不自然な例] 数直線 $\mathbb{R}$

実数 $\mathbb{R}$ でいいのに，わざわざ「数直線」という言葉を使う理由は何でしょうか？

> [不自然な例] 凸関数，凹関数の議論

小平本には書いてありますが，この証明には必要ない部分です．

> [不自然な例] f が C^n 級とすると，f が C^{n+1} 級であることを示した後で，「数学的帰納法より f は C^∞ 級」

数学的帰納法より示されるのは「任意の n について f は C^n 級である」ということです．C^∞ 級の定義から，そのような関数 f は C^∞ 級であると言えます．つまりここには 2 段階の議論があります．それを「数学的帰納法より」で済ますのは不自然です．解答として書く場合にはここまで省略するべきではありません．教科書に略解を書く場合には，省略するかもしれませんが．