2013 年度　早稲田大学　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　補講レポート解答例

基礎問題

問題 1. (x,y) が円板 $x^2+y^2 \le 5$ 内を動くとき,

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

の最小値を求めよ.

証明. f が円板の内部で最小値をとるならば，その点で f は極小である．$f_x = f_y = 0$ を解いて,

$$(x,y) = (0,0),\ (\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}).$$

この中で f の最小値は -8 である.

次に $x^2+y^2=5$ の上での f の最小値を求めよう.

$$g(\theta) = f(\sqrt{5}\cos\theta, \sqrt{5}\sin\theta) = -\frac{25}{2}(\sin 2\theta)^2 + 10\sin 2\theta + 15.$$

g の最小値は $-\frac{15}{2}$ である.

以上から，f の最小値は -8. □

問題 2. 極座標で方程式

$$r = 1 - \cos\theta$$

により与えられた曲線がある．この曲線で囲まれる領域の上で,

$$f(x,y) = x^2$$

の積分が

$$\frac{49\pi}{32}$$

であることを確かめよ.

証明. 求める積分は,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r^3\cos^2\theta drd\theta$$

であり，まず r について積分すると,

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(1-\cos\theta)^4\cos^2\theta d\theta$$

である．前期標準問題 6 のようにして，$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$ を求め，x を $\pi/2 - x$ で置換することで，$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$ が求まる．これより上記の積分を計算すると，$\dfrac{49\pi}{32}$ が求まる． □

標準問題

問題 3. 極座標を用いて

$$r^2 = \cos 2\theta$$

により定義される曲線の概形を書け．また主要な点の座標を付記せよ．

証明. レムニスケートと呼ばれる曲線である． □

問題 4. $x > 0$ に対して，

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$x > 0,\, y > 0$ に対して，

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$$

とする．以下の事実を確認せよ．

(i) $\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$
(ii) $\Gamma(1) = 1$
(iii) $B(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

証明. それぞれ，ガンマ関数，ベータ関数と呼ばれる有名な関数であり，証明は至る所で見つかるであろう． □

応用問題

問題 5. n 次元超球 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1$ の体積 V_n を以下の *2* つの方法で求めよ．

(i) $V_n = 2V_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$ を導き，帰納法により．
(ii) $D_n = \{X_1 \ge 0, \cdots, X_n \ge 0, X_1 + \cdots + X_n \le 1\}$ として，

$$V_n = \int_{D_n} X_1^{-1/2} \cdots X_n^{-1/2} dX_1 \cdots dX_n$$

を導いた後，$Y_n = \dfrac{X_n}{1 - X_1 \cdots - X_{n-1}}$ で変換し，帰納法により．

証明. (i)

$$\begin{aligned}V_n =&\int_{-1}^{1} dx_n \int_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\le 1-x_n^2} dx_1\cdots dx_{n-1}\\ =&\int_{-1}^{1} V_{n-1}(1-x_n^2)^{(n-1)/2}dx_n\\ =&2V_{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}V_n =&\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1} dx_1\cdots dx_n\\ =&2^n\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1, x_1\ge 0,\cdots,x_n\ge 0} dx_1\cdots x_n.\end{aligned}$$

ここで, $X_i = x_i^2$ の変換を用いれば, 問題文中の式が出てくる. $Y_n = X_n/(1-X_1\cdots - X_{n-1}$ で変換すれば,

$$\begin{aligned}V_n =&\int_{D_{n-1}} X_1^{-1/2}\cdots X_{n-1}^{-1/2}dX_1\cdots dX_{n-1}\int_0^{1-X_1\cdots-X_{n-1}} X_n^{-1/2}dX_n\\ =&\int_{D_{n-1}} X_1^{-1/2}\cdots X_{n-1}^{-1/2}dX_1\cdots dX_{n-1}\int_0^1 (1-X_1\cdots-X_{n-1})^{1/2}Y_n^{-1/2}dY_n\\ =&\int_{D_{n-1}} X_1^{-1/2}\cdots X_{n-1}^{-1/2}(1-X_1\cdots-X_{n-1})^{1/2}dX_1\cdots dX_{n-1}\times B(1/2,1).\end{aligned}$$

同様の変換を施すことで,

$$\begin{aligned}V_n =&B(1/2,1)B(1/2,-1/2+2)B(1/2,-2/2+3)\cdots B(1/2,-(n-1)/2+n)\\ =&\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(2/2)}{\Gamma(3/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(4/2)}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(4/2)}{\Gamma(5/2)}\cdots\frac{\Gamma(1/2)\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n+2)/2)}\\ =&\frac{\Gamma(1/2)^n}{\Gamma((n+1)/2)}.\end{aligned}$$

□

問題 6. 正の実数上で, 対数凸, $f(x+1)=xf(x)$, $f(1)=1$ である関数は, ガンマ関数に限ることを示せ.

証明. この事実は, ボーア・モレルップの定理 (Bohr-Mollerup Theorem) と呼ばれている. □