2013 年度　早稲田大学　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　補講レポート解答例

基礎問題

問題 1. 7% の利子を年に n 回の複利で払う口座に 100 万円が預金されるとき，10 年後に口座には

$$1,000,000 \times \left(1 + \frac{0.07}{n}\right)^{10n}$$

円があることになる．四半期ごと $(n = 4)$，月ごと $(n = 12)$，日ごと $(n = 365)$ では，この値はそれぞれいくらになるか，概算を求めよ．また，利子が連続的複利 $(n \to \infty)$ の場合には，どうなるか．

証明．$f(n) = \left(1 + \dfrac{0.07}{n}\right)^{10n}$ とおくと，それぞれ，

$$f(4) \approx 2.0015973\cdots,\ f(12) \approx 2.009661,\ f(365) \approx 2.013617$$

となる．$n \to \infty$ のときは，

$$f(n) = \left(\left(1 + \frac{1}{n/0.07}\right)^{n/0.07}\right)^{0.7} \to e^{0.7} \approx 2.01375$$

□

問題 2. ケプラーの法則によれば，太陽系の惑星は太陽の回りの楕円軌道上を動いている．時間 $t = 0$ において，惑星が太陽に最も近づくとする．このとき，これより後のある時間 t での惑星の中心から太陽の中心までの距離 r は，方程式

$$r = a(1 - e\cos\phi)$$

で決定される．ここで，a は中心の間の距離の平均値であり，e は楕円軌道の「平坦さ」を測る正の定数であり，そして ϕ はケプラーの方程式

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - e\sin\phi$$

の解である．ただし，ここでの T は惑星が軌道を 1 周するのにかかる時間である．$t = 90$ 日の場合の，地球と太陽の距離を推定せよ．ここで，$a = 150 \times 10^6 km$，$e = 0.0168$，$T = 365$ 日を用いよ．

証明. 代入して計算すると,

$$\phi \approx 1.56608,\ r \approx 149.988 \times 10^6 \mathrm{km}$$

□

問題 3. (i) $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x$ を示せ.

(ii) 無限等比数列の和の公式を使って, $\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{x^2+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (0 < x < 1)$ であることを示せ.

(iii) $\displaystyle\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ を示せ.

(iv) π の近似値を求めよ.

証明. (i)$x = \tan\theta$ と置換するか, $\tan^{-1}(x)$ の微分が x^2+1 であることを示す.

(ii) 初項 1, 公比 x^2 の等比数列の和を考えて,

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} = \frac{1 - x^{2n}}{x^2+1}$$

$n \to \infty$ の時の極限を考えて, 項別積分すれば良い.

(iii) $\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$ とおくと,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1.$$

(iv)

$$\pi = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5} \cdots\right) + 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 \cdot 3} + \frac{1}{3^5 \cdot 5} \cdots\right) \approx 3.1455 \cdots$$

□

標準問題

問題 4. e は無理数であることを示せ.

証明. $e = \dfrac{a}{b}$ を満たす自然数があると仮定すると,

$$b!e = \left(b! + \frac{b!}{1!} + \cdots + \frac{b!}{b!}\right) + \left(\frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \cdots\right)$$

ここで左辺は自然数で，右辺の第一項も自然数．ところが，

$$\left(\frac{b!}{(b+1)!}+\frac{b!}{(b+2)!}+\cdots\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots=1$$

より，右辺の第二項は 1 未満．これは矛盾． □

問題 5.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$$

は $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 級関数であるが，解析関数ではないことを示せ．

証明. 教科書参照 □

問題 6. $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$$

を求めよ．

証明. $I_n=\displaystyle\int\sin^n x\ dx$ とおいて，部分積分すると，

$$I_n=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

これより，

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

$J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n x\ dx$ とおくと，

$$J_n=[-\frac{1}{n}\sin^{n-1}\cos x]_0^{\pi/2}+\frac{n-1}{n}J_{n-2}=\frac{n-1}{n}J_{n-2}.$$

$J_0=\pi/2$ と $J_1=1$ より，

$$J_{2n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n\cdot(2n-2)\cdots4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2n+1}=\frac{2n\cdot(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdots3\cdot1}.$$

□

応用問題

問題 **7.** $a_n = n^2(\sin(1/n) - (1/n))$, $b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k/k$ とおく．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\{(a_n, b_n)\}$ に 1 点を付け加えれば，$\mathbb{R}^2$ 内のコンパクト集合となることを証明せよ．ただし，アーベルの定理は使って良い．

証明.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$
であるから，$\lim_n a_n = 0$. また，$|x| < 1$ のとき，
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$
より，項別積分して，
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$
$\sum_n (-1)^{n+1}/n$ は交代級数で収束するから，アーベルの定理から，
$$\log 2 = \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$
よって，$\lim_n b_n = -\log 2$. すなわち，$(0, -\log 2)$ を加えると，閉集合であり，コンパクトになる． □

問題 **8.** $\mathbb{R}$ 上で至るところ微分不可能な連続関数の例を挙げよ．

証明. ワイエルシュトラス関数や高木関数など． □

問題 **9.** 次の事実（スターリングの公式）を示せ．n を正の整数とすると，
$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\theta/12n}$$
となるような θ, $0 < \theta < 1$, が存在する．

証明. $f(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x$ とおくと，$f'(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$. $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3(1-x^2)}$ とおくと，$g'(x) = \frac{-2x^4}{3(1-x^2)^2}$. よって，$0 < x < 1$ に対して，$f(x) > 0, g(x) < 0$. すなわち，$0 < x < 1$ に対して，
$$0 < \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} - x < \frac{x^3}{3(1-x^2)}.$$

$x = \dfrac{1}{2n+1}$ とおくと，$\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{n+1}{n}$ で，

$$\frac{x^3}{3(1-x^2)} = \frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)}.$$

よって，

$$0 < \frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n} - \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{12(2n+1)(n^2+n)},$$

$$0 < \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 < \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

$$a_n = \frac{n^{n+(1/2)}e^{-n}}{n!},\ b_n = a_n e^{1/12n}$$

とおくと，$a_n < b_n$. さらに，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1/2} e^{-1} > 1,$$

$$\log\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\frac{n+1}{n} - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) < 0,$$

より $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} < 1$. すなわち，すべての n で $a_n < c < b_n$ を満たす c がただ一つ存在する.

$$h(\theta) = \frac{n^{n+1/2}e^{-n}e^{\theta/12n}}{n!}$$

とおくと，$h(0) = a_n$, $h(1) = b_n$ より，$h(\theta) = c$ を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する．よって，

$$n! = c^{-1}n^{n+1/2}e^{-n}e^{\theta/12n}.$$

c を求めよう．問題 6 より，

$$1 \leq \frac{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}x\ dx}{\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\ dx} = 1 + \frac{1}{2n}.$$

よって，

$$\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{J_{2n+1}}{J_{2n}}\frac{\pi}{2} = \lim_n \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1} = \lim_n \frac{2^2 4^2\cdots(2n-2)^2(2n)^2}{3^2 5^2\cdots(2n-1)^2}\frac{1}{2n}.$$

平方根をとって，

$$\pi^{1/2} = \lim_n \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!n^{1/2}}.$$

これから，

$$
\begin{aligned}
c =& \lim_n \frac{(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}{(2n)!} \\
=& \lim_n \frac{(n!)^2 2^{2n}\sqrt{2}}{(2n)!n^{1/2}} \cdot \left(\frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}\right)^2 \\
=& \sqrt{2\pi} \cdot c^2.
\end{aligned}
$$

よって，$c = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. □