

基礎問題, 標準問題, 応用問題のうちどれかを選んで解答せよ. また, 自由記述について解答せよ.

基礎問題

問題 1.  $(x, y)$  が円板  $x^2 + y^2 \leq 5$  内を動くとき,

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

の最小値を求めよ.

問題 2. 極座標で方程式

$$r = 1 - \cos \theta$$

により与えられた曲線がある. この曲線で囲まれる領域の上で,

$$f(x, y) = x^2$$

の積分が

$$\frac{49\pi}{32}$$

であることを確かめよ.

標準問題

問題 3. 極座標を用いて

$$r^2 = \cos 2\theta$$

により定義される曲線の概形を書け. また主要な点の座標を付記せよ.

問題 4.  $x > 0$  に対して,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$x > 0, y > 0$  に対して,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

とする. 以下の事実を確認せよ.

- (i)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- (ii)  $\Gamma(1) = 1$
- (iii)  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

応用問題

問題 5.  $n$  次元超球  $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$  の体積  $V_n$  を以下の 2 つの方法で求めよ.

- (i)  $V_n = 2V_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta$  を導き, 帰納法により.
- (ii)  $D_n = \{X_1 \geq 0, \dots, X_n \geq 0, X_1 + \cdots + X_n \leq 1\}$  として,

$$V_n = \int_{D_n} X_1^{-1/2} \cdots X_n^{-1/2} dX_1 \cdots dX_n$$

を導いた後,  $Y_n = \frac{X_n}{1 - X_1 - \cdots - X_{n-1}}$  で変換し, 帰納法により.

問題 6. 正の実数上で, 対数凸,  $f(x+1) = xf(x)$ ,  $f(1) = 1$  である関数は, ガンマ関数に限ることを示せ.

自由記述

問題 7. レポート用紙 1 枚以上で, 自由に記述せよ. 想定している内容としては, 以下のようなものがある.

- (i) 微分積分学の主要定理の完全な証明を与える.
- (ii) 微分積分学を学んで, 世の中に対する見方がどのように変わったか.
- (iii) 微分積分学を学び, 自分にとって最も理解が困難だった所を, 分かりやすく解説する.
- (iv) 微分積分学を学ぶ上で, 講義および演習をどのように利用したかを紹介する.

長さに上限は設けませんが, あまりにも長い場合は全部は読まないかもしれない.

その他, 講義への要望, 感想, 質問や, 大学の数学を勉強をしていて感じたことなどがあれば, 自由に書いてください.