

基礎問題, 標準問題, 応用問題のうちどれかを選んで解答せよ. また, 自由記述について解答せよ. 計 4 題をレポート課題とする.

基礎問題

問題 1. 7% の利子を年に  $n$  回の複利で払う口座に 100 万円が預金される時, 10 年後に口座には

$$1,000,000 \times \left(1 + \frac{0.07}{n}\right)^{10n}$$

円があることになる. 四半期ごと ( $n = 4$ ), 月ごと ( $n = 12$ ), 日ごと ( $n = 365$ ) では, この値はそれぞれいくらになるか, 概算を求めよ. また, 利子が連続的複利 ( $n \rightarrow \infty$ ) の場合には, どうなるか.

問題 2. ケプラーの法則によれば, 太陽系の惑星は太陽の回りの楕円軌道上を動いている. 時間  $t = 0$  において, 惑星が太陽に最も近づくとする. このとき, これより後のある時間  $t$  での惑星の中心から太陽の中心までの距離  $r$  は, 方程式

$$r = a(1 - e \cos \phi)$$

で決定される. ここで,  $a$  は中心の間の距離の平均値であり,  $e$  は楕円軌道の「平坦さ」を測る正の定数であり, そして  $\phi$  はケプラーの方程式

$$\frac{2\pi t}{T} = \phi - e \sin \phi$$

の解である. ただし, ここでの  $T$  は惑星が軌道を 1 周するのにかかる時間である.  $t = 90$  日の場合の, 地球と太陽の距離を推定せよ. ここで,  $a = 150 \times 10^6 \text{ km}$ ,  $e = 0.0168$ ,  $T = 365$  日を用いよ.

問題 3. (i)  $\int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x$  を示せ.

(ii) 無限等比数列の和の公式を使って,  $\int_0^x \frac{dx}{x^2 + 1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ , ( $0 < x < 1$ ) であることを示せ.

(iii)  $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$  を示せ.

(iv)  $\pi$  の近似値を求めよ.

標準問題

問題 4.  $e$  は無理数であることを示せ.

問題 5.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は  $\mathbb{R}$  上の  $C^\infty$  級関数であるが, 解析関数ではないことを示せ.

問題 6.  $n \in \mathbb{N}$  に対し,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

を求めよ.

応用問題

問題 7.  $a_n = n^2(\sin(1/n) - (1/n))$ ,  $b_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k/k$  とおく.  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $\{(a_n, b_n)\}$  に 1 点を付け加えれば,  $\mathbb{R}^2$  内のコンパクト集合となることを証明せよ. ただし, アーベルの定理は使って良い.

問題 8.  $\mathbb{R}$  上で至るところ微分不可能な連続関数の例を挙げよ.

問題 9. 次の事実 (スターリングの公式) を示せ.  $n$  を正の整数とすると,

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta/12n}$$

となるような  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , が存在する.

自由記述

問題 10. レポート用紙 1 枚以上で, 自由に記述せよ. 想定している内容としては, 以下のようなものがある.

- (i) 演習問題や市販の問題集の中から 1 題を選んで, その完全な解答を書く.
- (ii) 微分積分に関連するトピック (例えば,  $e$ ,  $\pi$ , ゼータ関数など) について調べて書く.
- (iii) 微分積分が他の分野にどのように使われているか調べて書く.

(iv) 自分で問題を考えて，解いて，その解答を書く．

長さに上限は設けませんが，あまりにも長い場合は全部は読まないかもしれない．

その他，講義への要望，感想，質問や，大学の数学を勉強をしていて感じたことなどがあれば，自由に書いてください．