2013 年度後期　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　理解度確認テスト B　問題用紙

以下の問に答えよ．解答用紙には答えのみではなく，計算過程や証明も書くこと．それらを含めて採点する．

問題 1. 次の四角に当てはまる語句を答えよ．

(1) 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$|PA| < \delta$ ならば $|f(P) - f(A)| < \epsilon$ とできるとき，関数 $f(P)$ は A で $\boxed{}$ であるという．

(2) 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$P, Q \in D$ に対し，$|PQ| < \delta$ ならば $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$ となるとき，f は D で $\boxed{}$ であるという．

(3) 定数 A, B が存在して

$$f(x, y) = f(a, b) + A(x - a) + B(y - b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$$

が成り立つならば，関数 f は (a, b) で $\boxed{}$ であるという．

(4) 関数 f がある領域 D に属する各点のある近傍で，その点を中心とする *Taylor* 級数に展開されるとき，f を $\boxed{}$ という．

(5) 写像 $\Phi : (u, v) \to (x, y)$ が連続微分可能であるとき，

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を $\boxed{}$ という．

(6) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$w(D) = \displaystyle\int_D dxdy$ を D の $\boxed{}$ という．

問題 2. 「2 重級数 $\displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}$ が実数 α に収束する」ことの定義を書け．

問題 3. 条件 $x^2(x+1) = y^2$ のもとで，xy の極値をすべて求めよ．

問題 4. 次の文章を読んで，以下の問いに答えよ．

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} \ (a > 0,\ b > 0).$$

に対し，$\tan x = t$ と置換すれば，$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{a + bt^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$．一方，$f(x, a, b) = (a\cos^2 x + b\sin^2 x)^{-1}$ に対し，$\underline{\partial f/\partial a,\ \partial f/\partial b \text{ は連続}}_{(1)}$ なので，<u>積分記号下の微</u>

$\underline{分}_{(2)}$ ができて，

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}},\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}.$$

よって，

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

(1) この事実を示せ．

(2) どの積分に対して，どの変数で微分した結果，どの式が結論できるのか，説明せよ．

問題 5. 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ を考える．

(1) この球の表面積を求めよ．

(2) この球面から円柱 $x^2 + y^2 = \pm ax$ をくり抜いた残りの部分の表面積を求めよ．

問題 6. $x > 0$ に対し

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ dt$$

と定義する．

(1) 上記の広義積分は存在し，$\Gamma(x)$ の値が定まることを示せ．

(2) $\Gamma(x)$ は無限回微分可能であることを示せ．