2013 年度前期　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　理解度確認テスト B　問題用紙

以下の問に答えよ．解答用紙には答えのみではなく，計算過程や証明も書くこと．それらを含めて採点する．

問題 **1.** 「実数列 $\{a_n\}$ が実数値 α に収束する」ことの定義を書け．

問題 **2.** 平均値の定理の主張を書け．(いくつかバリエーションがあるが，好きなもの 1 つ)

問題 **3.** 次の級数の収束・発散を判定せよ．収束する場合は絶対収束するかどうかも調べよ．

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$$

問題 **4.** $f(x)$ は $[a,b]$ で連続で，(a,b) で微分可能であるとする．$f'(x)$ が (a,b) で有界であるとき，$f(x)$ は $[a,b]$ で有界であることを示せ．

問題 **5.** 以下の関数の極値を求めよ．$f(x)=x-2\sin x$

問題 **6.** 次の関数の不定積分を求めよ．

(i) $\dfrac{1}{1-x^2}$

(ii) $\dfrac{5}{4x^2+3}$

(iii) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

問題 **7.** 次の不等式を示せ．$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}<\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}<\frac{\pi}{2}$

問題 **8.** 関数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$，$(x\geq 0)$ が連続であることを示せ．

問題 **9.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\alpha$ を示せ．

問題 **10.** 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

この数列は極限値 γ を持ち，$\gamma>\dfrac{1}{2}$ を満たすことを示せ．