2013 年度後期　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　理解度確認テスト B　解答

問題 1. 次の四角に当てはまる語句を答えよ.

(1) 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$|PA| < \delta$ ならば $|f(P) - f(A)| < \epsilon$ とできるとき，関数 $f(P)$ は A で $\boxed{}$ であるという.

(2) 任意の実数 $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$P, Q \in D$ に対し，$|PQ| < \delta$ ならば $|f(P) - f(Q)| < \epsilon$ となるとき，f は D で $\boxed{}$ であるという.

(3) 定数 A, B が存在して

$$f(x,y) = f(a,b) + A(x-a) + B(y-b) + o(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2})$$

が成り立つならば，関数 f は (a,b) で $\boxed{}$ であるという.

(4) 関数 f がある領域 D に属する各点のある近傍で，その点を中心とする Taylor 級数に展開されるとき，f を $\boxed{}$ という.

(5) 写像 $\Phi : (u,v) \to (x,y)$ が連続微分可能であるとき，

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

を $\boxed{}$ という.

(6) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し，$w(D) = \displaystyle\int_D dxdy$ を D の $\boxed{}$ という.

解.　(1) 連続

(2) 一様連続

(3) 微分可能

(4) 解析関数

(5) ヤコビアン，もしくは，関数行列式

(6) 面積

□

講評. 基本的な語句を問う問題. 配点は各 5 点.

(3) で「微分可能性」と書いた場合は 2 点.

(4) は「実解析関数」でも良い.

(5) で「ヤコビ行列」と書いた場合は 2 点.

(6) は「重積分」という答えもあったが，被積分関数が定数関数 1 の場合なので，不適切.

□

問題 2. 「2 重級数 $\displaystyle\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n}$ が実数 α に収束する」ことの定義を書け．

解．任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在し，

$$k > N,\ l > N \Rightarrow |\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{l} a_{m,n} - \alpha| < \epsilon$$

となること． □

講評．「定義を書け」問題．配点は 10 点．

意外と出来ている人が少なかった． □

問題 3. 条件 $x^2(x+1) = y^2$ のもとで，xy の極値をすべて求めよ．

解．ラグランジュの未定係数法を使う．

$$\Phi = xy - \lambda(x^2(x+1) - y^2)$$

と置いて，$\Phi_x = \Phi_y = \Phi_\lambda = 0$ を書き下すと，

$$y = \lambda(3x^2 + 2x),\ x = -2\lambda y,\ x^2(x+1) = y^2$$

これを解いて，$(x,y) = (0,0)$, $\left(-\dfrac{4}{5},\ \pm\dfrac{4}{5\sqrt{5}}\right)$．$(0,0)$ は極値ではない．xy の符号を考えれば，$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{4}{5\sqrt{5}}\right)$ で極大値 $\frac{16}{25\sqrt{5}}$，$\left(-\frac{4}{5}, \frac{4}{5\sqrt{5}}\right)$ で極小値 $-\frac{16}{25\sqrt{5}}$ であることが分かる． □

講評．条件付き極値判定問題．配点は 10 点．

極値の判定は，極値の定義に基づいて考える必要がある．

ラグランジュの未定係数法によって式が立てられたら 3 点．極値の候補を求めらることができていたら 6 点．極値の判定までできて 10 点． □

問題 4. 次の文章を読んで，以下の問いに答えよ．

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}\ (a > 0,\ b > 0).$$

に対し，$\tan x = t$ と置換すれば，$J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{a + bt^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$．一方，$f(x,a,b) = (a\cos^2 x + b\sin^2 x)^{-1}$ に対し，$\underline{\partial f/\partial a,\ \partial f/\partial b\text{ は連続}}_{(1)}$ なので，<u>積分記号下の微</u>

分$_{(2)}$ができて,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}},\ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}.$$

よって,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

(1) この事実を示せ.

(2) どの積分に対して,どの変数で微分した結果,どの式が結論できるのか,説明せよ.

解. (1)

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{-\cos^2 x}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}$$

であるから,$a\cos^2 x + b\sin^2 x \neq 0$ であることを示せば良い.もし $= 0$ なら,$a > 0$, $b > 0$ より,$\cos x = \sin x = 0$ だが,これはあり得ない.$\frac{\partial f}{\partial b}$ も同様.

(2) 積分

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

において,両辺を a で微分する.左辺を微分すると,積分記号下の微分で,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-\cos^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2}$$

となる.右辺を微分すると,$-\frac{\pi}{4a\sqrt{ab}}$ となる.これらが等しいから,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4a\sqrt{ab}}$$

が結論できる.同様に,b で微分すれば,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x\ dx}{(a\cos^2 x + b\sin^2 x)^2} = \frac{\pi}{4b\sqrt{ab}}$$

を得る. □

講評. 積分記号下の微分の理解を問う問題.配点はそれぞれ 10 点.

(1) で $a\cos^2 x + b\sin^2 x \neq 0$ の確認をしていない場合 8 点.(2) で負の符号が抜けている人も多かったが,その部分の減点はしていない. □

問題 5. 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ を考える.

(1) この球の表面積を求めよ.

(2) この球面から円柱 $x^2+y^2=\pm ax$ をくり抜いた残りの部分の表面積を求めよ.

解. (1) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ より,

$$z_x=\frac{-x}{z},\ z_y=\frac{-y}{z}$$

だから,

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{a^2-x^2-y^2}.$$

$$S=2\int\int_{x^2+y^2\leq a^2}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy.$$

極座標変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ より,

$$\begin{aligned}S=&2\int\int_{r\leq a}\frac{a}{a^2-r^2}rdrd\theta=8a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a\frac{r}{a^2-r^2}dr\\=&8a\int_0^{\pi/2}[-\sqrt{a^2-r^2}]_0^a d\theta=8a^2\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi a^2.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}S=&2\int\int_{x^2+y^2\leq a^2,\ x^2+y^2\geq a|x|}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy\\=&2\int\int_{r\leq a,\ a|\cos\theta|\leq r}\frac{a}{a^2-r^2}rdrd\theta=8a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_{a\cos\theta}^a\frac{r}{a^2-r^2}dr\\=&8a\int_0^{\pi/2}[-\sqrt{a^2-r^2}]_{a\cos\theta}^a d\theta=8a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta=8a^2.\end{aligned}$$

□

証明. 表面積の計算を問う問題. 配点はそれぞれ 10 点.

(1) は他の方法でも可. 答えだけ書いてある場合 3 点. (2) は答えに π が出てこないのが驚きの面白い問題だったのだが, できていた人は... □

問題 6. $x>0$ に対し

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ dt$$

と定義する.

(1) 上記の広義積分は存在し，$\Gamma(x)$ の値が定まることを示せ．

(2) $\Gamma(x)$ は無限回微分可能であることを示せ．

解．(1) 任意の $x > 0$ に対し，$\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}t^{x-1} = 0$ なので，ある定数 M が存在して，$e^{-t/2}t^{x-1} \le M$.

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\ dt \le \int_1^\infty Me^{-t/2}\ dt < \infty.$$

$0 < x < 1$ のときは,

$$\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}\ dt \le \int_0^1 t^{x-1}\ dt = [t^x]_0^1 = 1 < \infty.$$

$x \ge 1$ のときは，$e^{-t}t^{x-1}$ は連続なので，定積分 $\int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt$ は存在する．

(2)

$$f_n(x,t) = e^{-t}t^{x-1}(\log x)^n$$

とおいて,

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty f_n(x,t)dt$$

であることを示す．そのためには，f_n は連続だから，$\alpha \le x \le \beta$ での優関数の存在を示せば良い．

まず $0 \le t \le 1$ の場合を考える．十分小さな $\epsilon > 0$ に対して,

$$\lim_{t\to+0} t^\epsilon \log t = \lim_{t\to+0} \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{-\epsilon t^{-\epsilon-1}} = 0.$$

よって，x に依存しないある M が存在して,

$$e^{-t}t^{x-1}(\log x)^n \le t^{\beta-n\epsilon-1}M$$

で，$\int_0^1 t^{\beta-n\epsilon-1}Mdt < \infty$.

次に $t \ge 1$ の場合を考える．

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t/2}t^{\beta-1}(\log t)^n = 0$$

であるから，x に依存しないある N が存在して,

$$e^{-t}t^{x-1}(\log x)^n \le Ne^{-t/2}$$

で，$\int_1^\infty Ne^{-t/2}dt < \infty$. □

講評．収束の証明を問う問題．配点はそれぞれ 10 点．

(1) は 3 つの部分に分けられる．それぞれについてできていれば部分点を与えた． □

総評．テスト B に関しては，論理を中心に採点した．方針が書いてあれば部分点を与え，計算ミスの減点は少なくした． □