2013 年度前期　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　理解度確認テスト A　解答

問題 1. 「実数列 $\{a_n\}$ が実数値 α に収束する」ことの定義を書け．

任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$$N > n \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

を満たす．

問題 2. 平均値の定理の主張を書け．（いくつかバリエーションがあるが，好きなもの 1 つ）

$f(x)$ を $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能な関数とする．この時，

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす実数 $c \in (a, b)$ が存在する．

問題 3. 次の級数の収束・発散を判定せよ．収束する場合は絶対収束するかどうかも調べよ．

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots$$

証明．数列 $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$ は 0 に収束する単調減少数列なので，ライプニッツの定理より収束する．$\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_n \frac{1}{n} = \infty$ より絶対収束はしない． □

問題 4. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続で，(a, b) で微分可能であるとする．$f'(x)$ が (a, b) で有界であるとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で有界であることを示せ．

証明．f は閉区間 $[a, b]$ で連続だから，$[a, b]$ で一様連続．よって，最大最小を持ち，有界である． □

別解．$f'(x)$ が (a, b) で有界であるから，ある実数 M が存在して，$|f'(x)| \leq M, x \in (a, b)$．平均値の定理から，$x \in (a, b]$ に関して，

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

を満たす $c_x \in (a,x)$ が存在する．これより，

$$f(a)-M(b-a) \leq f(a)-M(x-a) \leq f(x) \leq M(x-a)+f(a) \leq M(b-a)+f(a).$$

よって，$f(x)$ は $[a,b]$ で有界である． $\square$

問題 **5.** 以下の関数の極値を求めよ．$f(x)=x-2\sin x$

証明. $f'(x)=1-2\cos x$，$f''(x)=2\sin x$． $f'(x)=0$ を解くと，$x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi$． $f''\left(\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)=\sqrt{3}>0$ より，極小値 $\dfrac{\pi}{3}+2n\pi-\sqrt{3}$． $f''\left(-\dfrac{\pi}{3}+2n\pi\right)=-\sqrt{3}<0$ より，極大値 $\frac{-\pi}{3}+2n\pi+\sqrt{3}$． $\square$

問題 **6.** 次の関数の不定積分を求めよ．

(i) $\dfrac{1}{1-x^2}$

(ii) $\dfrac{5}{4x^2+3}$

(iii) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$

証明. (i)

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

(ii)

$$\int \frac{5}{4x^2+3}dx = \frac{5}{4}\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}/2}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}/2} = \frac{5}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

(iii) $t=\tan(x/2)$ とおいて，

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx =& \int\frac{2t/(1+t^2)}{1+2t/(1+t^2)}\frac{2}{1+t^2}dt = 4\int\frac{t}{(1+t^2)(t+t)^2}dt\\ =&2\int\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt = 2\left(\tan^{-1}t+\frac{1}{1+t}\right)\\ =&x+\frac{2}{1+\tan(x/2)}\end{aligned}$$

(別解)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\sin x} =&1-\frac{1}{1+\sin x} = 1-\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\\ =&1-\frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 1-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

これより，

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x} = x - \tan x + \frac{1}{\cos x}.$$

□

問題 7. 次の不等式を示せ．$\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}} < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{\pi}{2}$

証明. $0 < x < 1$ のとき

$$\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ここで，$x = \sin\theta$ で置換して，$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ より，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

これより題意が成り立つ． □

問題 8. 関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$，$(x \geq 0)$ が連続であることを示せ．

証明.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \infty.$$

だから，M テストより，一様収束する．よって，連続． □

別解.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1}\right) = \frac{1}{x+1}.$$

よって，連続． □

問題 9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$ を示せ．

証明. 正の実数 ϵ を固定する．仮定よりある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$n > N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

を満たす．ここで，$n > N$ に対しては，

$$
\begin{aligned}
&|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha| \\
=&|\frac{(a_1-\alpha)+(a_2-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n}| \\
\leq&|\frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_N-\alpha)}{n}|+|\frac{(a_{N+1}-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n-N}|\cdot|\frac{n-N}{n}|
\end{aligned}
$$

である．$(a_1-\alpha)+\cdots+(a_N-\alpha)$ は定数だから，ある自然数 $M > N$ が存在して，

$$n > M \Rightarrow |\frac{(a_1-\alpha)+\cdots+(a_N-\alpha)}{n}| < \frac{\epsilon}{2}.$$

また，$n > N$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|\frac{(a_{N+1}-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n-N}| \leq& \frac{|a_{N+1}-\alpha|+\cdots+|a_n-\alpha|}{n-N} \\
<& \frac{\epsilon/2+\cdots+\epsilon/2}{n-N} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

これと，$\frac{n-N}{n} \leq 1$ から，$n > M$ なら，

$$|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\alpha| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

よって題意が示された． □

問題 10. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

この数列は極限値 γ を持ち，$\gamma > \dfrac{1}{2}$ を満たすことを示せ．

証明. $x \in [n, n+1]$ のとき，$\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{n}$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} = \int_1^{n+1}\frac{dx}{x} = [\log x]_1^{n+1} = \log(n+1).$$

これより，$a_n \geq 0$. また，

$$a_n - a_{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{2n^2(n+1)} \geq 0.$$

ここで，$\log(1+x) > x - \dfrac{1}{2}x^2 \ (x > 0)$ を使った．よって，$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少列なので，極限値を持つ．

$y = \dfrac{1}{x}$ は下に凸なので，$x \in [k, k+1]$ のとき，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} + \epsilon_k.$$

よって，左辺を $k=1$ から n まで足すと，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

右辺を $k=1$ から n まで足すと，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int_k^{k+1} \frac{dx}{x}\right) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k = \log(n+1) + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k.$$

よって，

$$a_n + \log n - \log(n+1) + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k.$$

両辺の極限を取って，題意が示される． $\square$