2013 年度前期　数学 B2(微分積分)　基幹 (5)　理解度確認テスト A　解答および講評

問題 1.　(1) 次の極限は存在するか？存在するならその値を述べよ. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

(2) 次の関数は原点において連続か？

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y}{x-y} & (y \neq x) \\ 0 & (y = x) \end{cases}$$

解. (1) $y = kx$ とおけば,

$$\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \frac{k^2x^4}{x^4+k^4x^4} = \frac{k^2}{k^4+1}$$

だが, この値は k によって変化する. よって, 極限は 存在しない

(2) $h = x - y$ とおくと,

$$\frac{x^2+y}{x-y} = x^2 + x - hh = \frac{x^2+x}{h} - 1$$

ここで, x と h が 0 に近づいても, $\frac{x^2+x}{h}$ は 1 に近づくとは限らない. よって, 連続ではない

□

講評. (1) は極限, (2) は連続の意味を理解しているかを問う問題. 配点は各 5 点. □

問題 2. 関数 $g(x,y) = (x^2+y^2)\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ について, 偏微分係数 $g_x(1,\sqrt{3})$ の値を求めよ.

解.

$$g_x(x,y) = 2x\tan^{-1}\frac{y}{x} + (x^2+y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}y(-x^{-2}) = 2x\tan^{-1}\frac{y}{x} - y.$$

よって,

$$g_x(1,\sqrt{3}) = 2\cdot 1\cdot\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} - \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

□

講評. 偏微分の計算ができるかどうかを問う問題. 配点は 10 点. □

問題 3. 2 変数関数 $f(x,y) = x^3 - 3x + 2y^2 - 12y$ はただ一つの点で極値をとる. その点とその極値を求めよ.

解.

$$f_x = 3x^2 - 3,\ f_y = 4y - 12$$

より $f_x = f_y = 0$ をとくと，$(\pm 1, 3)$.

$$f_{xx} = 6x,\ f_{xy} = 0,\ f_{yy} = 4$$

$(x, y) = (-1, 3)$ のとき,

$$H = -6 \cdot 4 - 0 = -24 < 0$$

よりこの点では f は極値をとらない．$(x, y) = (1, 3)$ のとき,

$$H = 6 \cdot 4 - 0 = 24$$

より f は $(1, 3)$ で極小値を取る．その値は

$$f(1, 3) = 1 - 3 + 18 - 36 = -20.$$

□

講評. 極値の判定ができるかどうかを問う問題．配点は 10 点. □

問題 4. 領域 $D = \{(x, y)\ :\ \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ における関数 $f(x, y) = x(1+y)$ の重積分を求めよ.

解.

$$\begin{aligned} V =& \int_0^1 \left(\int_0^{2\sqrt{1-y^2}} (1+y) x dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1+y}{2} \cdot 4(1-y^2) dy \\ =& 2 \cdot \int_0^1 (1 + y - y^2 - y^3) dy = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

□

講評. 重積分が計算できるかを問う問題．配点は 10 点. □

問題 5. 領域 $D = \{(x, y)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ における関数 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ の重積分を求めよ.

解.

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r e^r dr \right) d\theta = 2\pi \left(e - \int_0^1 e^r dr \right) = 2\pi.$$

□

講評. 変数変換を使った重積分の計算ができるかを問う問題. 配点は 10 点. □

問題 6. (1) 領域 $D = \{(x, y, z) \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ における関数 $f(x, y, z) = x^2$ の 3 重積分を求めよ.

(2) 領域 $D = \{(x, y, z) \ : \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} + \dfrac{z^2}{9} \leq 1\}$ における関数 $f(x, y, z) = x^2$ の 3 重積分を求めよ.

解. (1)

$$\begin{aligned} V =& \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ =& \frac{1}{5} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{15}\pi. \end{aligned}$$

(2)

$$x = 2u, \ y = 5v, \ z = 3w$$

で変換すると, ヤコビアンは $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. よって,

$$V = \int_{D'} (2u)^2 30 du dv dw = 120 \frac{4}{15}\pi = 32\pi.$$

□

講評. 3 重積分の計算ができるかどうかを問う問題. 配点はそれぞれ 10 点. □

問題 7. $x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3 = 0$ 上の点 $(0, 0, 1)$ における $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を求めよ.

解. $f(x, y, z) = x^2 + (x - y^2 + 1)z - z^3$ とすると, $f = 0$ を x で微分して,

$$\begin{aligned} 2x + z + (x - y^2 + 1)\frac{\partial z}{\partial x} - 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{x - y^2 + 1 - 3z^2}. \end{aligned}$$

$(0, 0, 1)$ を代入して, $1/2$ □

講評. 陰関数定理を使って偏微分の計算ができるかどうかを問う問題. 配点は 10 点. □

問題 8. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan^{-1} tx}{x\sqrt{1 - x^2}} dx$ を求めよ.

解．求める積分を $F(t)$ とおく．t について微分して，

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+t^2\sin^2 u} = \int_0^{\infty} \frac{dv}{1+(1+t^2)v^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

$F(0)=0$ より，

$$F(t) = \frac{\pi}{2}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pi}{2}\log|t+\sqrt{t^2+1}|.$$

□

講評．積分記号下の微分を使って定積分を求めることができるかどうかを問う問題．配点は 10 点． □

総評．テスト A に関しては，基本的に部分点はない． □