反応拡散方程式における進行波解と全域解

二宮広和　森田 善久
龍谷大学理工学部

1 序

自然界には様々な形の波が観察される．特に一定の形状で伝播する波を表現する偏微分方程式やその解は古くから研究者の関心を引いてきた．定数係数の波動方程式や弦の振動方程式などの線形偏微分方程式はもちろんのこと，流体の方程式や KdV 方程式のような非線形の方程式にも現れることはよく知られている[1]．これらの方程式において，波の伝播や振動の伝播などを表現する特徴的な解は，重要な役割を担っている．一方，拡散現象のようなエネルギーの散逸を伴う現象においては，エネルギーの散逸によって伝播する過程で形が崩れてしまう．そのため，一定の形で波が伝わっていくためには何か別な駆動力が必要となってくる．例えば，熱（拡散）方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

では，$u(x,t) = e^{-c(\pm x - ct)}$ という解が存在する．これは，エネルギーの散逸とそれに見合うエネルギーが遠方からやってくるため，形を崩さず一定の速度 $\pm c$ で進行する解となっている．このように一定の形状を保って，一定の速度で移動する解を進行波解という．ただし，この解は遠方で発散しているため，現象を表現する解としては非現実的である．いずれにせよ，拡散項が優位に働く方程式において進行波が存在する場合には，上で述べた波動方程式等とその発生過程が原理的に異なることが容易に想像できる．

物質科学，生物学および生命科学などの分野の理論的研究では数理モデルを用いた研究が盛んであるが，現象論的なモデルとしてしばしば拡散とキネティクス（kinetics）を取り入れたモデル方程式が登場する．その代表的なモデル方程式として反応拡散方程式とよばれる半線形放物型方程式がある．この反応拡散方程式（あるいは連立のシステムの場合）は，反応項の駆動力により進行波が形成されることが幅広いクラスの方程式に対して報告されており，進行波解はパターン形

[1]線形波から始まって，非線形方程式の孤立波（ソリトン）を丁寧に解説した著書として [62] をあげておく．また，オイラー方程式による水面波の興味ある研究をまとめたものとして [55] がある．

成やパターンの伝播を表現する特徴的な解として古くから数学者の興味を惹いてきた（[21, 43, 39, 40, 65] などを参照)．この論説の目的は，反応拡散方程式に現れる進行波やそれに関連した解のダイナミクスの研究について，最近の成果と新しい研究の動向を解説することであるが，進行波の研究はあまりにも幅が広く筆者達の力量では全ての領域を解説することは難しい．そこで，今回は，スカラーの方程式における「１次元全域解の研究」と「高次元（2 次元以上）の進行波解の研究」を中心的なテーマにして，関連する話題を随時取り込んでいくことにする．この２つのテーマとそれが関連する分野は，最近１０年近くの間に急速に数学的な研究が進展し将来的にも発展が期待される．これを機会にこの分野の研究に興味をもって頂ける方が少しでも増えれば幸いである．

次節以降，フロント進行波とよばれる単調な形状をもつ進行波解が存在する具体例から始めて２つのフロント進行波が衝突・消滅する現象や，合体して新しい進行波を生む現象を表現する全域解（時間・空間全域で定義される解）の存在について解説する．進行波解や平衡解も全域解の特殊な例であるが，ここではそれ以外の全域解を考察したい．反応拡散方程式のような放物型偏微分方程式は，一般の初期条件に対して時間負の方向に延長できない．進行波解のように常微分方程式の解として特徴付けられる場合は，その存在について色々な証明方法が開発されてきたが，もっと広い意味での全域解の存在を示すためには新しい手法が必要である．ここでは時間 $t \to -\infty$ での挙動を特徴付けることによって，２つのフロント進行波が絡む全域解の存在が議論できることを解説しよう．

進行波の研究は主に１次元の問題から発展してきたが，最近は高次元空間における進行波解の研究も進展している．後半は２次元以上の全領域における最近の進行波解の研究成果について解説し，最後に他の話題についても簡単に触れることにする．

2　進行波解をもつ方程式の具体例

この節では反応拡散方程式の具体例を２，３挙げてその進行波解の発生原理と研究の歴史について簡単に紹介しよう．

まず，進行波をもつ反応拡散方程式としてつぎの Fisher-KPP 方程式をとりあげる．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) \tag{2.1}$$

方程式 (2.1) において拡散がないと仮定するとロジスティック方程式と呼ばれる

$$\frac{du}{dt} = u(1-u)$$

が運動法則を決める．$u = 0, 1$ がこの方程式の平衡解 (定常解）で，$u = 1$ は安定であるが $u = 0$ は不安定で，正の値の初期条件から出発した解は $u = 1$ に漸近する．

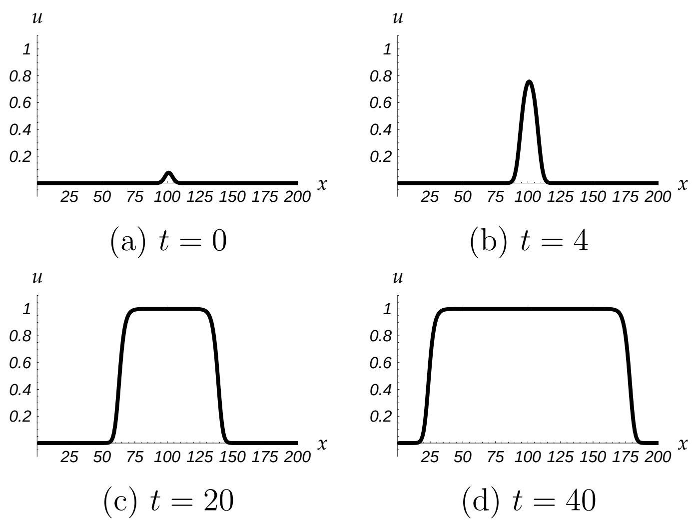


図 1: Fisher-KPP 方程式のフロント進行波の発生

そこで (2.1) にコンパクトなサポートをもつ $u=1$ より値の小さい非負の初期条件を課すと，この常微分方程式から決まる運動にしたがって，$u=1$ のほうに伸びようとする．一方，拡散の効果により初期条件の両側は広がろうとする．このバランスによりやがて両側に単調な形状の波が生成される（図 1 参照）．左右の先端は反対方向に進行するが，この先端の単調な形状から一定速度で進行する進行波解の存在が示唆される．すなわち，単調な形状で一定の速度で右あるいは左に伝播するフロント進行波解の存在が予想される．実際，初期条件として，与えられた定数 K に対し $x<K$ で恒等的に 1, $x>K$ で恒等的に 0 となる不連続関数をとると，右に進行する単調な波が形成される（図 2 参照）．このモデル方程式において進行波の研究が初めて登場するのは，Fisher [21] と Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov [43] の研究である．彼等の研究に因んでこの方程式は Fisher-KPP 方程式と呼ばれる．特に，[43] は進行波解の存在や安定性に関する数学的に先駆的な研究として名高い（そのため KPP 方程式と呼ばれることも多い）．その後しばらく期間を経て７０年代から多数の研究が現れており，退化型の非線形拡散方程式などの研究も進んでいる．

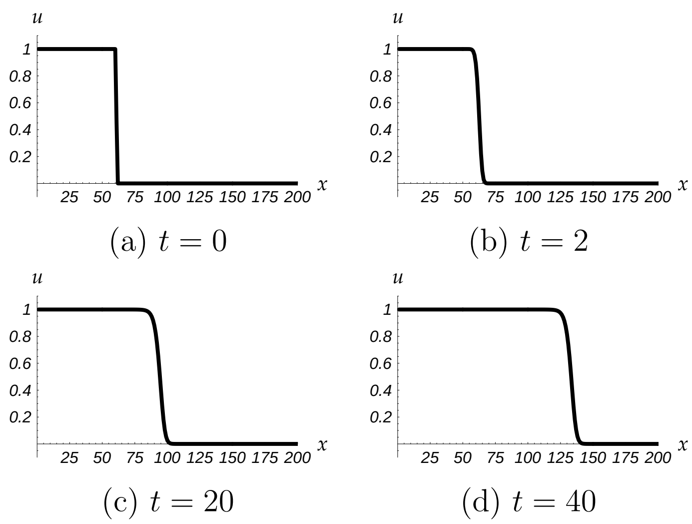
一方，Nagumo 方程式 (あるいは Allen-Cahn 方程式) とよばれる反応拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)(u-a), \qquad 0<a<1, \tag{2.2}$$

の場合の進行波の発生について考察してみよう．やはり常微分方程式

$$\frac{du}{dt}=u(1-u)(u-a) \tag{2.3}$$

を考えると，定数解 $u=0,a,1$ のうち $u=0,1$ は漸近安定であるが，$u=a$ は $u=0$ に漸近する解と $u=1$ に漸近する解を分ける不安定な定数解である．$a=1/2$ の



(a) $t = 0$　(b) $t = 2$　(c) $t = 20$　(d) $t = 40$

図 2: Fisher-KPP 方程式のフロント進行波の伝播

とき $u = 0$ の引き込み領域と $u = 1$ の引き込み領域はバランスし，それ以外では例えば $0 < a < 1/2$ なら $u = 1$ の引き込み領域が広くなる．(2.2) の初期条件 $u_0(x)$ を, 十分大きな正の数 K に対し

$$a < u_0(x) < 1 \quad (x \in (-\infty, -K]), \qquad 0 < u_0(x) < a \quad (x \in [K, \infty))$$

を満たすようにとる．常微分方程式で決まる運動法則から区間 $(-\infty, -K]$ と $[K, \infty)$ ではそれぞれ $u = 1$ と $u = 0$ の方に近づこうとするが，拡散の効果で $x \approx -\infty$ では $u \approx 1$, $x \approx +\infty$ で $u \approx 0$ となる単調減少な波形が形成される．その後，$0 < a < 1/2$ なら $u = 1$ の引き込みが強いので，この波形は右方向に動く進行波となり，$1/2 < a < 1$ なら左方向に動く（図 3 参照）．また，$a = 1/2$ のバランスした場合はそのまま静止した状態を保つ．

上の (2.1) と (2.2) の例からわかるように，非線形項の違いによって進行波解の発生する原理は微妙に変わってくるが，数学的には一定速度で伝播する固定した波形の解を求めるために，動座標 $z = x - ct$ を導入し $u = \phi(x - ct)$ の形の解を見つければよい．一般に１次元の反応拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \tag{2.4}$$

を考えると，速度 c の進行波解 $u = \phi(z)$ は次の無限領域における２階常微分方程式の境界値問題の解として求めることができる[2]：

$$\phi'' + c\phi' + f(\phi) = 0, \quad -\infty < z < \infty, \qquad \phi(-\infty) = \alpha, \quad \phi(\infty) = \omega. \tag{2.5}$$

[2] 方程式 (2.5) を解く問題は未知関数 ϕ と未知数 c を求める問題なので非線形固有値問題の一種とみることもできる．

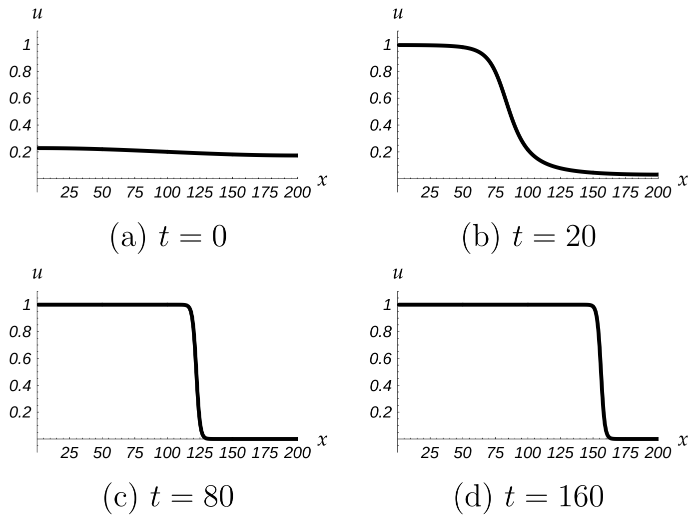


図 3: $a = 0.2$ のときの Nagumo 方程式のフロント進行波の発生

ここで，$' = d/dz, '' = d^2/dz^2$ で α, ω は $f(u)$ の零点（定数解）にとる．上の Nagumo 方程式の例では $(\alpha, \omega) = (1, 0)$ であるが，$(\alpha, \omega) = (0, 1)$ の場合も同様に考えることができる．実際，方程式 (2.4) は折り返し $x \mapsto -x$ に関して対称性をもつので，一方の条件の解が存在すれば，もう一方は折り返しによって自動的に得られることに注意しておく．また，上の Fisher-KPP 方程式や Nagumo 方程式では，(2.5) と $(\alpha, \omega) = (1, 0), (0, 1)$ を満たす正の進行波解は単調になることが示され（$\phi'(z) \neq 0$ $(z \in \mathbb{R})$）フロント進行波と呼ばれる．

ところで同じような拡散項をもつ非線形偏微分方程式として Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

が有名である．粘性項に相当する右辺の拡散が無い場合（$\nu = 0$），衝撃波（shock wave）とよばれる不連続な進行波解が存在するが，拡散項を入れることにより進行波解が連続となる．この方程式は左辺の項だけで進行波を発生する駆動力があり，(2.4) とは違った性質をもつことに注意しておこう．

さて，(2.1) や (2.2) の場合にはフロント進行波解の存在は比較的容易に示すことができるが，進行波解の一意性や安定性についても様々な研究がある．拡散を無視したときの常微分方程式が一つしか漸近安定な平衡解（定数解）をもたない場合，(2.4) は単安定な反応拡散方程式，２つの漸近安定な平衡解をもつときは双安定な反応拡散方程式とよばれる．(2.4) のような双安定な場合には，$u = 0$ と $u = 1$ を結ぶフロント進行波解は x 方向の平行移動を除くと（存在すれば）一意で，局所的安定性だけでなく広いクラスの初期条件に対して進行波解の漸近安定性が示されている（[19, 20, 9, 10, 59] などを参照)．一方，(2.1) のような

単安定な場合には進行波解は一意でなく，連続な速度をもつ解の族を成す．一般の単安定な $f(u)$ に対する最小速度がどのように決まるか，与えられた初期条件を満たす解がどの速度の進行解に漸近するかなどの研究が進んでいる（例えば, [1, 2, 7, 22, 38, 39, 40, 46, 63] などの数学的研究と物理的な視点から研究 [15] がある).

反応拡散系とよばれる連立の拡散方程式についても簡単に触れておこう.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial x^2} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}),$$

ここで,

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix},$$

$d_1, d_2 \geq 0, d_1 + d_2 > 0$ とする (一般に 3 変数以上の連立方程式を考えることもできるが，ここでは簡単のため 2 変数系を考える)．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = 0$ を解いて得られた定数解を $\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{u}_2^*$ とすると，スカラーの場合と同様に $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}(z) = (U(z), V(z)), z = x - ct$ とおいて進行波解の方程式

$$D\boldsymbol{U}'' + c\boldsymbol{U}' + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}) = 0, \quad \boldsymbol{U}(-\infty) = \boldsymbol{u}_1^*, \quad \boldsymbol{U}(\infty) = \boldsymbol{u}_2^*,$$

を得る．この方程式は $(\boldsymbol{U}(z), \boldsymbol{U}'(z)) = (U(z), V(z), U'(z), V'(z))$ の 4 変数の 1 階常微分方程式系に書き直すことができるので，条件

$$\lim_{z\to-\infty}(\boldsymbol{U}(z), \boldsymbol{U}'(z)) = (\boldsymbol{u}_1^*, 0), \qquad \lim_{z\to\infty}(\boldsymbol{U}(z), \boldsymbol{U}'(z)) = (\boldsymbol{u}_2^*, 0),$$

を満たす解を求めることと同値になる．このような解を求めるのは，力学系の用語を用いれば，$\boldsymbol{u}_1^* \neq \boldsymbol{u}_2^*$ の場合には 2 つの平衡点 $(\boldsymbol{u}_1^*, 0), (\boldsymbol{u}_2^*, 0)$ を結ぶヘテロニック軌道を，$\boldsymbol{u}_1^* = \boldsymbol{u}_2^*$ の場合にはホモクリニック軌道を求める問題になる．スカラーの場合は，2 次元の相空間での問題になるのでこのような軌道は比較的容易に求められるが，4 次元における問題は通常簡単ではない ([58] 参照)．このようなシステムの反応拡散方程式における進行波解の研究が進んでいる代表的なモデル方程式として (i) ロトカ・ボルテラ拡散競合系, (ii) FitzHugh-Nagumo 方程式, (iii) Gray-Scott 方程式，の 3 つをあげておこう．(i) については観音氏の論説 [41] を, (ii)(iii) については西浦氏の論説 [53, 54] を参照するとよい.

3　進行波解から全域解へ

進行波解は反応拡散方程式のパターンダイナミクスを表現する特徴的な解であることは間違いないが，反応拡散方程式のもつ豊かなダイナミクスがこれだけで理解できるわけでない．前節の最後で取り上げた西浦氏の解説にもあるように,

(iii) のようなシステムでは，パルス進行波解（$\boldsymbol{u}_1^* = \boldsymbol{u}_2^*$ の場合）を２つ並べるような初期条件を与えると，パルス解が衝突して消滅したり，反射したりあるいはカオス的挙動に移ったりと，非常に豊富な挙動をする．このような２変数以上の反応拡散方程式のシステムに現れる多種多様なダイナミクスの数学的解明は，非常に魅力的な課題である．分岐解析や数値計算を用いてこのようなダイナミクスが発生するシナリオについてはかなり解明されているが，数学的に厳密な証明という視点からはまだ不完全である．これからの研究発展が期待される分野である．

スカラーの拡散方程式 (2.4) に戻ると，この方程式では最大値原理が成立するので，２つの解 $u_1(x,t), u_2(x,t)$ が初期条件 $u_1(x,0) \leq u_2(x,0)$ $(x \in \mathbb{R})$ を満たすと，$u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ $(x \in \mathbb{R})$ が任意の $t \geq 0$ で満たされ２つの解の順序が保存される．この性質は解の振る舞いに大きな制限を与え，複雑な挙動はあまり期待できないと考えるのは自然である．ところが，最近の研究により今まで見過ごされていた特徴的なダイナミクスをもつ解が予想していたより豊富に存在することがわかってきた．(2.2) を例に説明しよう．(2.2) は次の３種類の厳密に解けるフロント進行波解をもつ：

$$
\begin{aligned}
\phi(x-ct) &= \frac{1}{1+\exp\{x/\sqrt{2}-(1/2-a)t\}} & \left(c = \frac{1-2a}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.1)\\
\widetilde{\psi}_1(x-c_1t) &= \frac{a\exp\{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2\}+1}{\exp\{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2\}+1} & \left(c_1 = \frac{1+a}{\sqrt{2}}\right), \quad (3.2)\\
\widetilde{\psi}_2(x-c_2t) &= \frac{a}{1+\exp\{ax/\sqrt{2}-(a^2/2-a)t\}} & \left(c_2 = \frac{a-2}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.3)
\end{aligned}
$$

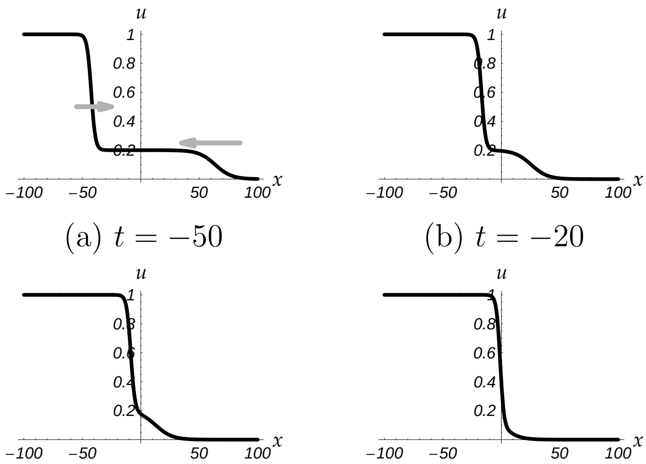
最初の解は, $u=1$ と $u=0$ を結ぶ単調減少な今まで説明してきた進行波であるが，残りの２つもそれぞれ $u=1$ と $u=a$，$u=a$ と $u=0$ を結ぶフロント進行解である．ところがこれら以外にもつぎの厳密解がある．

$$
\Psi(x,t) = \frac{1+a\exp\left\{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2\right\}}{1+\exp\left\{x/\sqrt{2}-(1/2-a)t\right\}+\exp\left\{(1-a)x/\sqrt{2}-(1-a^2)t/2\right\}} \tag{3.4}
$$

この形は２ーソリトン解のように２つの進行波の成分をもっていることは容易にわかるが，右辺は

$$
\frac{\exp\left\{-(1-a)x/\sqrt{2}+(1-a^2)t/2\right\}+a}{\exp\left\{-(1-a)x/\sqrt{2}+(1-a^2)t/2\right\}+\exp\left\{ax/\sqrt{2}-(a^2/2-a)t\right\}+1}
$$

と書き直すこともできるので，実際の振る舞いを一目で予想するのは容易ではない．$0 < a < 1/2$ のときの適当な時間ごとの解の形状のスナップを図４に示しておく．この図からわかるように，$t \ll -1$ のとき，$x \leq 0$ では (3.2) で与えられる $\widetilde{\psi}_1$ のように，$x \geq 0$ では (3.3) で与えられる $\widetilde{\psi}_2$ のように振る舞う．その後ある時



(a) $t=-50$ (b) $t=-20$

(c) $t=-10$ (d) $t=0$

図 4: $a=0.2$ のときの Nagumo 方程式の厳密解 (3.4) の時間的変化．２つのフロント進行波の合併と新しい進行波の生成が見てとれる．

刻で２つのフロント波は合体し，結局進行波 ϕ のように振舞う．$0<a<1/2$ のとき，簡単な計算から Ψ の漸近挙動は

$$\Psi\to\phi\quad(t\to\infty),\qquad \Psi\to\begin{cases}\widetilde{\psi}_1 & (x\le 0)\\ \widetilde{\psi}_2 & (x\ge 0)\end{cases}\qquad (t\to-\infty)\tag{3.5}$$

であるので，$t\to\infty$ の挙動だけを見る限りは進行波解 ϕ へ収束する解に過ぎないが，その途中の挙動が面白いのである．

このような面白い解が見つかっていたのにもかかわらず (Kawahara-Tanaka[42])，この方面の数学的な研究は最近まで発展しなかった．その理由として，一般に時間が負の方向に延長できない放物型の方程式に対しては $t\to\infty$ で漸近挙動が主な興味の対象となることや，反応拡散方程式は可積分系でないので，あくまで特殊な例として数学的な興味を引かなかったのではないかと想像される．ところが，最近になって (2.4) のような方程式についても単純な形状をもつフロント進行波解だけでなく，もう少し複雑な形状の解を特徴付けようという研究が発展しつつある．一般に，N 次元空間の反応拡散方程式の古典解で全ての $(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ に対して定義される解を**全域解（entire solution）**と呼ぶことにする．この命名は，楕円型方程式の全空間で定義される解を全域解とよぶことに倣ったもので，Hamel-Nadirashvili[33] に因る．平衡解や進行波でない全域解を全て決定することができれば，(2.4) の大域的なダイナミクスの理解に向けて大きな前進となる．(3.4) はまさに (2.4) の自明でない空間１次元の全域解の例である．

力学系の視点から見ると，(2.4) の解が生成する力学系（適当な関数空間上の無限次元力学系）を考えれば，その不変集合 (invariant set) は全域解からなるので

このような問題意識は自然でありその重要性が理解できるであろう．有限区間上の反応拡散方程式 (2.4) の研究では，ある条件の場合には大域的吸引集合（global attractor）とよばれる最大の不変集合が存在し，それは平衡解と平衡解を結ぶ軌道（無限次元相空間におけるヘテロクリニック軌道）からなることが証明できる（[28] 参照）．しかもどのような軌道が存在するかについても解明されている具体例がある（[8, 17, 18]）．それに対して無限区間の場合には進行波や (3.4) のような有限区間では現れない解も出現し，大域的な不変集合の構造を決定するには全域解の数学的な特徴づけが必要になってくる．途中の経過を無視すれば $t \to -\infty$ での漸近挙動でもってこのような解を特徴付けるのが自然な発想である．実際，$t \to -\infty$ での漸近挙動から (3.5) の全域解を特徴付ければ，どのような種類の全域解が存在可能であるかを一般的に議論できる．もちろん特徴付けができたとしても，実際に存在することをどのように証明するか問題が残る．(2.4) のような放物型の偏微分方程式では，一般に時間が負の方向に初期値問題が解けないので，この問題点を解決しなければならない．節を改めて，特徴的な挙動をする全域解の数学的結果を紹介しよう．

4 特徴的な挙動をする全域解の存在

(2.4) の $u = 1$ と $u = 0$ を結ぶ進行波解，すなわち (2.5) で $\alpha = 1, \omega = 0$ の解 $\phi = \phi(z; c)$ を考える．$f(u)$ が単安定の条件

$$f(0) = f(1) = 0, \qquad f(u) > 0 \ \ (0 < u < 1), \quad f'(0)f'(1) \neq 0$$

を満たすとき，ある最小速度 $c_m > 0$ が存在して，フロント進行波解の族 $\{\phi(\cdot; c)\}_{c \geq c_m}$ が得られる．$c_1, c_2 \geq c_m$ に対して２つのフロント進行波

$$\phi_1(x - c_1 t) := \phi(x - c_1 t; c_1), \qquad \phi_2(x + c_2 t) := \phi(-x - c_2 t; c_2)$$

の組 ϕ_1, ϕ_2 を考える．ここで ϕ_1 は x について単調減少であるが，ϕ_2 は単調増加な関数になっているので，これらのグラフを x-u 平面に重ね合わせて描くと，$t \ll -1$ なら，向かいあったフロント波ができる．そこでこのような形状を持つ全域解の存在を考えよう．実際，任意の $c_1, c_2 \geq c_m$ に対して

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to -\infty} \{\sup_{x \leq 0} |U(x,t) - \phi_1(x - c_1 t)| + \sup_{x \geq 0} |U(x,t) - \phi_2(x + c_2 t)|\} = 0, \\ &\lim_{t \to \infty} |U(x,t) - 1| = 0 \end{aligned}$$

を満たす全域解 $U(x,t)$ が存在する．この解は，２つのフロント進行波が x 軸の両側から現れ，ある時刻で衝突し消滅する現象に対応する解を表している（図５参照）．このような全域解の存在は f に関するさらなる条件 $f'(0) > f'(u)$ $(0 < u < 1)$

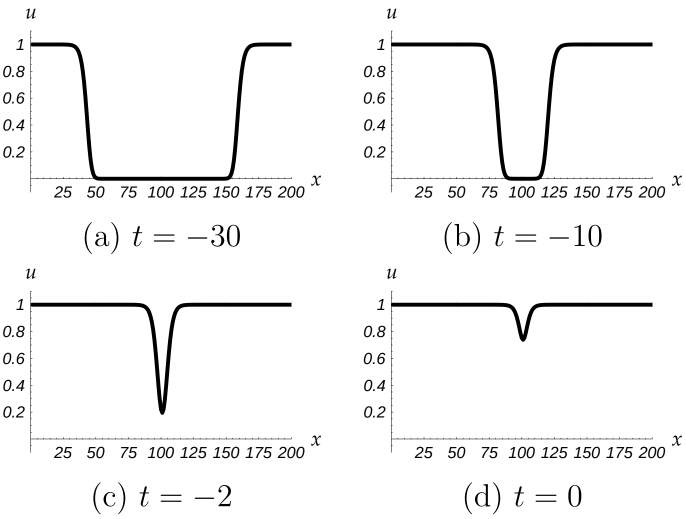


図 5: Fisher-KPP 方程式の２つのフロント進行波の衝突・消滅

のもとで [33] で初めて証明された．彼らの証明のアイデアは

$$\underline{U}(x,t) := \sup\{\phi_1(x-c_1t), \phi_2(x+c_2t)\}$$

を下から評価する比較関数（劣解）としてとり，$t=-n$ でのこの関数を初期条件にする (2.4) の解の列 $\{U_n\}$ を構成する．この列を上からうまく評価することによって，その収束先の関数が求める挙動をする全域解であることを証明する．

しかし，彼らの議論は Nagumo 方程式 (2.2) のような双安定の場合には直接適用できない．双安定の場合には，進行波解は平行移動を除いて一意であるから一見やさしく見えるが，$f(u)$ および $f'(u)$ は区間 $[0,1]$ で符号を変えるので，彼らが用いた上からの評価が使えないのである．双安定の場合の全域解についての最初の結果は Yagisita [71] によって示された．進行波解は適当な関数空間において１次元の軌道となる．双安定な場合にはその軌道の法線方向の双曲安定性が示せるので，それを用いて，$t<0$ に対して２つの進行波の動きを表現する解を不変多様体の理論を適用して証明した．彼の議論はシステムの場合にも拡張できる方法であるが，一方で Fisher-KPP 方程式のような単安定の場合には進行波解が族で現れるので双曲性の仮定が破れてしまう．

ところで力学系の不変多様体の理論を適用して，２つの進行波を十分引き離したときに起こる相互作用を１次元のダイナミクスに縮約する Ei[16] の研究がある．[16] における議論を検証すると，任意に十分引き離した２つの進行波解（あるいはパルス進行波解）に対して不変多様体を構成しているので，うまく点列をとれば $t=-\infty$ まで延長できる解の存在が議論できる．残念ながら全域解につながる視点が論文では明示されていない．しかし，システムへの発展を考える場合には重要な研究である．

Fukao-Morita-Ninomiya[23] では，Nagumo 方程式の厳密なフロント進行波解の表現を利用して，劣解と優解をうまく構成して２つのフロントの消滅に対応する全域解を構成した．さらに，このアイデアは Guo-Morita[27] で発展され，単安定，双安定の両方に対して統一した方法で証明できることが示された．なお，[27] では，[33] で扱えなかった最小速度との組み合わせに対しても，全域解の存在を示している．さらに Chen-Guo[11] では，証明の改良および広いクラスでの一意性が示されており，[12] では，双安定で $c = 0$ の場合（この場合は２つのフロントの相互作用が指数的に小さくなり，指数的に遅い動きになる）も議論されている．

これらの研究と，前節で紹介した２つのフロントが合体して別なフロントになる現象も考慮して，２つのフロント進行波の運動を双安定の場合に分類してみよう．以下 $0 < a < 1/2$ を仮定する．方程式の値域を区間 $[0, a]$ および $[a, 1]$ に制限すると，制限した方程式はそれぞれ $u = 0$ および $u = 1$ を漸近安定な定数平衡解にもつ単安定な方程式とみなすことができるので，$u = 0$ と不安定な $u = a$ および $u = 1$ と $u = a$ を結ぶフロント進行波解が存在する．しかも，このようなフロント解はある一定以上の速度をもつ連続な解の族として存在することに注意しておこう．全域解の存在を考えるときは，$t \to -\infty$ での挙動が重要である．$t \approx -\infty$ のとき，２つの進行波のフロントの距離が十分離れそれぞれがほぼ独立に振舞うような２つの進行波の組み合わせを考えよう．$\phi_j = \phi_j(x - c_j t)$ $(j = 1, 2)$ を

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_j''(z) + c_j \phi_j'(z) + f(\phi_j(z)) = 0, \quad z \in \mathbb{R} \\ \phi_j(-\infty) = \alpha_j, \quad \phi_j(\infty) = \omega_j \end{array} \right. \quad (j = 1, 2), \tag{4.1}$$

の解として得られる (2.4) のフロント進行波解とする．$(\alpha_j, \omega_j) = (1, 0), (1, a), (0, a)$ のときは $c_j > 0$，α_j と ω_j の値が逆の場合は $c_j < 0$ である．$t \ll -1$ のとき ϕ_1 のフロントは ϕ_2 の左にくるように設定し２つの進行波を結びつける条件

$$\omega_1 = \alpha_2.$$

を仮定する．(α_1, ω_1) と (α_2, ω_2) の可能な組み合わせは

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) \in \ & \{(0, a, a, 1), (0, a, a, 0), (0, 1, 1, a), (0, 1, 1, 0), \\ & (a, 0, 0, a), (a, 0, 0, 1), (a, 1, 1, a), (a, 1, 1, 0), \\ & (1, a, a, 1), (1, a, a, 0), (1, 0, 0, a), (1, 0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

だけある．方程式は $x \mapsto -x$ の折り返しに対して対称なので一つの解が得られ，それを折り返したものも解となる．このような解はどちらか一つだけとることにし，さらに $t \to -\infty$ で２つのフロント進行波解に漸近するような組み合わせは

$$(1, 0, 0, 1), (1, a, a, 1), (0, a, a, 0), (1, a, a, 0), (1, 0, 0, a) \tag{4.2}$$

だけとなる．(4.2) の最初の３つは衝突・消滅の場合に相当し，残りの２つの進行波が合体する場合に相当する．

これらの全ての場合に全域解の存在が統一的に議論できる方法が最近の筆者達の研究（[47]）によって報告されている．この研究によって，特殊なケースと思われていた (3.4) の厳密解が示す 2 つの進行波の合体は，速度を任意に組合せたときにも可能であり，また一般の双安定な $f(u)$ の場合にも存在することが示された．さらに $(1,0,0,a)$ のような新しいタイプの全域解が発見されている．これらの全域解の存在について定理の形でまとめておこう．

定理 4.1 (4.1) の任意の解の組 $(\phi_j(z), c_j)$ $(j=1,2)$ について，

$$(\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) = (1,0,0,1), (1,a,a,1), (0,a,a,0), (1,a,a,0)$$

のいずれの場合にも次の漸近挙動をする全域解 $U(x,t)$ が存在する．

$$\lim_{t\to-\infty}\{\sup_{x\le 0}|U(x,t)-\phi_1(x-c_1t)| + \sup_{x\ge 0}|U(x,t)-\phi_2(x-c_2t)|\} = 0.$$

また，$(\alpha_1, \omega_1, \alpha_2, \omega_2) = (1,0,0,a)$ の場合は，$c_1 > c_2$ のとき

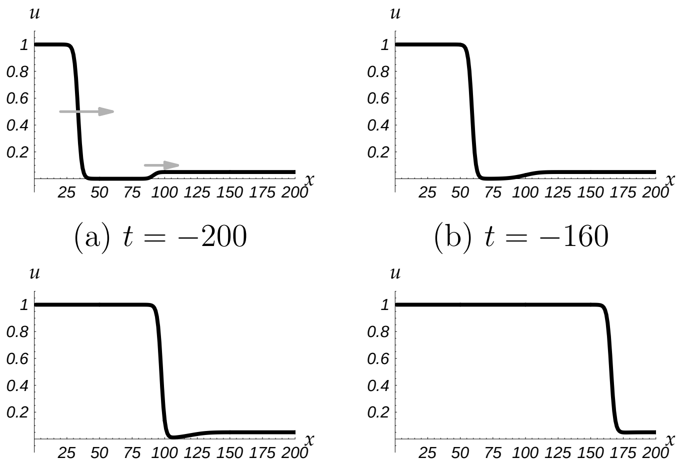
$$\begin{aligned}\lim_{t\to-\infty}\{&\sup_{x\le(c_1+c_2)t/2}|W(x,t)-\phi_1(x-c_1t)| \\ &+ \sup_{x\ge(c_1+c_2)t/2}|W(x,t)-\phi_2(x-c_2t)|\} = 0\end{aligned}$$

を満たす全域解 $W(x,t)$ が存在する．

定理の全域解 $U(x,t)$ の $t\to\infty$ での漸近挙動は，最初の 2 つの場合は定数解 $u=1$ に収束し 3 つ目の場合は $u=0$ に収束する．また，4 番目の場合は前節の厳密解のように $u=1$ と $u=0$ を結ぶ進行波解 $\phi(x-ct+\theta)$ に収束することも証明できる．ここで θ は一意に決まる定数である．最後の $W(x,t)$ の場合は，数値計算から大きなフロント波が小さなフロント波に追いつき飲み込む様子が観察される．その後，形状を変えて $u=1$ と $u=a$ を結ぶ進行波解に収束するように思われる（図 6 参照）．しかし，この 2 つの定数解 $u=a,1$ を結ぶ進行波解は一意ではないので，数学的には $t\to\infty$ のときの漸近挙動はまだ明らかでない．予想としてはより強い安定性をもつ最も速度の遅い進行波解に近づくと思われる．

上記以外にも，進行波と関連した異なるタイプの全域解が存在する．例えば，双安定な場合には不安定な一峰の形状をした平衡解が存在するが，この不安定解に $t\to-\infty$ で収束し，$t\to\infty$ のとき両側でフロント進行波が広がっていく全域解の存在も示すことができる（[23]）．もちろん，任意の波数をもつ不安定平衡解も存在するので，その解に $t\to-\infty$ で近づく解を考えると非常に複雑な構造が予想されるが，進行波解との関連した挙動をする解だけでも完全に決定できると大きな前進である．

以上の考察をもとにこれからの研究方向と課題をまとめておこう．



(a) $t = -200$　(b) $t = -160$

(c) $t = -100$　(d) $t = 0$

図 6: $a = 0.05$ の場合の数値計算．定理 4.1 の条件 $c_1 > c_2$ が成り立つように a をとっている．大きなフロント波が小さなフロント波を飲み込み，新しいフロント進行波が生成される様子が見てとれる．

(i) フロント進行波の運動が関係する全ての全域解の決定とタイプの分類；

(ii) 全域解の一意性と安定性；

(iii) 大域的な力学系の構造の解明；

(iv) 高次元領域における全域解の存在.

5　高次元進行波解 I

本節では 2 次元以上の全空間における進行波解について考えよう．$\mathbb{R}^N$ 上の Allen-Cahn 方程式（高次元の場合は Nagumo 方程式よりこちらの呼び方がより一般的である）

$$u_t = \Delta u + f(u) \tag{5.1}$$

を考える．ここで，$f(u) := u(1-u)(u-a)$，$0 < a < 1/2$ を仮定する．方程式は，この Allen-Cahn 方程式に限らず 1 次元進行波をもつような双安定な反応拡散方程式に拡張できるが，ここでは話を簡単にするためこの方程式に限定しよう．このとき，方程式 (2.2) の 1 次元の進行波解 ϕ とその速度 c は，(3.1) で与えられ $c > 0$ となる．

話をわかりやすくするため，高次元進行波解の進行方向を x_N 軸とする．$y = x_N$ と x_N 以外の成分 $x \in \mathbb{R}^{N-1}$ とに分けて，$\varphi(x, y - \nu t)$ という形で与えられる進行波解を探そう．$z = y - \nu t$ とおくと，この進行波解は次の楕円型方程式の解として求めることができる:

$$-\nu\varphi_z = \Delta'\varphi + \varphi_{zz} + f(\varphi). \tag{5.2}$$

ここで,

$$\Delta' = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

と表記した．遠方での条件は

$$\lim_{z\to-\infty} \varphi(x,z) = 1, \quad \lim_{z\to\infty} \varphi(x,z) = 0. \tag{5.3}$$

とする．確かに１次元の解 $\phi(\cdot)$ は，上の楕円型方程式 (5.2) を満たしている．これは解の形状から平面波解と呼ばれる．平面波解以外の高次元空間特有の問題として (5.2) の解 φ と ν を求める問題を考えることにする．このとき速度 ν の進行波解 φ の存在とともに，速度 ν の取りうる値および進行波解の形状を調べていく．

まず，２次元平面上の問題を考えよう．空間変数は $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ とする．図 7(a) のように速度 c で，右下側と左下側から単位法線ベクトル $\mathbf{n}_i$ 方向に進む２つの平面波 $\phi((x,y)\cdot\mathbf{n}_i - ct)$ $(i = 1, 2)$ が角度 2α でぶつかる状況を考えよう．このとき，図 7(b) のようなＶ字型進行波解が現れることが以下のように予想される．

$$\varphi^-(x,y) := \max\left\{\phi\left((x,y)\cdot\mathbf{n}_1 - ct\right), \phi\left((x,y)\cdot\mathbf{n}_2 - ct\right)\right\} \tag{5.4}$$

とおくと，この関数は２つの平面進行波解の大きい方なので劣解になる．この劣解より上にある進行波解でこの劣解の形状に近いものを予想しよう．遠方では，等高線は直線なので平面波解と同じように運動するとしてよいであろう．この劣解は y 軸方向に $\nu = c/\sin\alpha$ で進むので，その速度 ν は c より大きいことに注意しよう．つぎに，“角” の部分に注目する．φ^- の等高線は “角” があるが，進行波解自体は拡散項の影響で “角” が取れて丸くなることが容易に想像できる．その進行波解の等高線の “角” が取れすぎてその部分の等高線の曲率が小さ過ぎると１次元進行波解の速度 c に近くなり過ぎて，劣解より遅く動くことになる．一方，“角” がきついとその箇所では曲率の影響でより速度が大きくなる．こうして角の箇所では速度に適合する適当な形が選択されて，図 7(b) のようなＶ字型の進行波解が形成されると予想される．実際，つぎの存在定理が与えられる．

定理 5.1 ([31, 32, 51, 52]) $0 < a < 1/2$, $N \geq 2$ のとき，任意の速度 $\nu > c$ に対して，(5.2),(5.3) の解 $\varphi(x,z)$ が存在する．

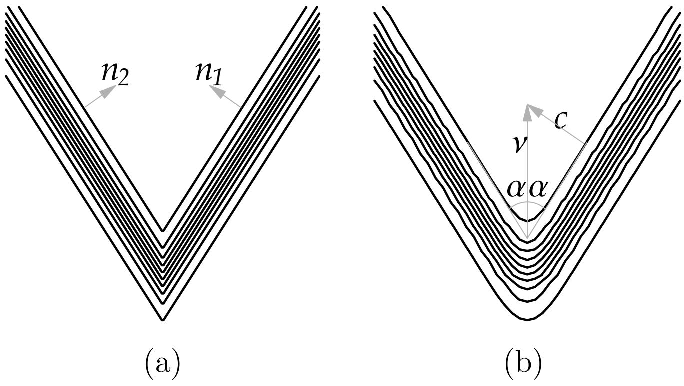


図 7: φ^- の等高線 (a) と 2 次元空間上の進行波解の等高線 (b)

$u=0$ と $u=1$ を結ぶ空間 1 次元の双安定系の進行波解の速度は一意に決まったが，上の結果からわかるように，空間高次元の進行波解は V 字形の角度に対応して c より大きい任意の速度をもつものが存在する．

$N=2$ のときは，Hamel-Monneaux-Roquejoffre [31, 32] および Ninomiya-Taniguchi [51, 52] が独立に定理の存在を証明した．どちらも (5.4) のような劣解に加えて，優解を構成することにより進行波解の存在を示しているがその構成方法は異なる．後者は，外力つきの平均曲率流から決まる漸近線をもった曲線と 1 次元進行波解 ϕ を用いて優解を構成している．1 次元進行波解をうまく用いた利点として，後者では大域的な漸近挙動についてもシャープな結果を得ているが，次元の制限が付いている．一方，前者の研究では自由境界値問題の解を用いて，$N \geq 3$ の場合に関しても，進行方向の軸を中心に回転対称な進行波解 $\widetilde{\varphi}(|x|, y-\nu t)$ の構成に成功している．ただし，後者の方法の発展として，Taniguchi [61] が，高次元でも角錐状の進行波解の構成に成功したことを付け加えておく．

上の進行波解の幾何学的形状についてもう少し考察しよう．空間 2 次元の場合の進行波解の等高面は，直線に漸近する形状であるのに対して進行方向に回転対称な進行波解の等高面は，回転方向の曲率が影響し遠方で直線に漸近することはない．ここにも次元の違いが表れている．

そこで逆に，回転対称な進行波解があるとき，その等高面がどうなるか考えてみよう．あるリプシッツ連続な関数 $\gamma(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ があって，

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{z-\gamma(x)<-R} \varphi(x,z) = 1,$$
$$\lim_{R\to\infty} \inf_{z-\gamma(x)>R} \varphi(x,z) = 0$$

となる速度 ν の進行波解 φ が存在するとしよう．このとき，最大値の原理より，

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi_z < 0$$

が従う．さらに $\lambda \in (0,1)$ のとき，$\Gamma_\lambda := \{(x,z)|\varphi(x,z)=\lambda\}$ 上では，

$$\inf_{\Gamma_\lambda} |\varphi_z| > 0$$

である．こうして，

$$\lim_{|x|\to\infty} \left| \frac{x}{|x|} \cdot \nabla\gamma(x) \right| = \cot\alpha = \frac{\sqrt{\nu^2 - c^2}}{c}$$

が導かれる ([31])．これは，速度 ν によって進行波解の形状 φ の等高面の漸近的な傾きが決まることを意味している．また，この収束は $N=2$ のときは指数的であるが，$N \geq 3$ のときは $1/|x|$ に比例し，漸近線をもたないことが知られている ([32])．

この角度 α によってその進行波の形状にどのような影響がでるであろうか？ $\alpha = \pi/2$ では等高面はフラットになり 1 次元の進行波解に帰着される．$\alpha > \pi/2$ になると，曲率は速度を抑える方向に働くため等高面はどんどん平らになり，等高線は，自己相似的に拡大する円弧のように振る舞う．これについては，ここではこれ以上詳しく述べないが，文献として Deckelnick-Elliott-Richardson [14], Hamel-Nadirashivili [34] を挙げておく．また，α が $\pi/2$ より小さいが十分近いときに，摂動によって生じる挙動を分岐理論を用いて調べた研究 [35] がある．

6　高次元進行波解 II

前節で扱った $0 < a < 1/2$ の場合の Allen-Cahn 方程式では，正の速度で伝播する平面波解が存在するので，図 7(a) のように 2 つの平面波解をもとに，高次元進行波解の構成が可能となった．$a = 1/2$ のとき，(2.3) の定数解 $u=0$ と $u=1$ の引き込み領域はバランスし，(5.1) の平面進行波解の速度は 0 になり定在波と呼ばれる定常解になる．そのため，前節のような方法では進行波解を構成できない．しかし，興味あることに高次元では幾何学的形状に起因して任意の正の速度をもつ進行波解が存在する．

定理 6.1 ([13]) $a = 1/2,\ N \geq 2$ のとき，任意の正の速度 ν に対して (5.2),(5.3) の解 φ_* が存在する．

このような解が存在する原理を理解するため，簡単にその進行波解の存在証明のアイデアを紹介しておこう．

$$f_\varepsilon(u) := u(1-u)\Big(u - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\Big)$$

とおくと，

$$u_t = \Delta u + f_\varepsilon(u) \tag{6.1}$$

は，定理 5.1 の適用でき，任意の ε より大きい速度 ν に対して (6.1) の進行波解 φ_ε が存在する．そこで $\varphi_\varepsilon(0) = 1/3$ となるように φ_ε を平行移動しておく．集合 $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は，楕円型方程式の Schauder 評価より，$\varepsilon \downarrow 0$ のとき収束する部分列がとれ，収束先 φ_* が，(5.1) の進行波解となることが示される（$\varphi_*(0) = 1/3$ なので，これは自明な解ではない）.

さらに，この進行波解の幾何学的形状について以下のようなことがわかっている.

定理 6.2 ([13]) $a = 1/2,\ N \geq 2$ とする．定理 6.1 で構成した速度 ν の進行波解を φ_* とする.

$$\Gamma = \left\{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; \varphi_*(x,z) = \frac{1}{2}\right\}$$

とおくと，

(i) $N > 2$ のとき，Γ は，漸近的には以下のよう放物面に近づく:

$$\lim_{z\to\infty,\ (x,z)\in\Gamma} \frac{|x|^2}{2z} = \frac{n-1}{\nu}.$$

(ii) $N = 2$ のとき，ある正の定数 A が存在して以下を満たす.

$$\lim_{z\to\infty,\ (x,z)\in\Gamma} \frac{\cosh(2\sqrt{f'(0)}\ x)}{\sqrt{f'(0)}\ z} = \frac{A}{\nu}.$$

この進行波解の一意性は大変興味深い問題である．実際，$\nu = 0$ のときは，次の De Giorgi の予想と関係が深い.

De Giorgi の予想：$N \leq 8$ のとき，$0 \leq u \leq 1$ を満たす方程式

$$\Delta u + u(1-u)\left(u - \frac{1}{2}\right) = 0$$

について，x_N に関して単調減少な解 u の等高面は超平面となる.

この予想に条件 (5.3) を加えた問題も議論されている ([26])．定理 6.2 が意味するところは，$\nu \neq 0$ では (5.3) を加えてもこの予想は正しくなく，$\nu = 0$ という条件が本質的であることを示している．なお，最新の結果として，De Giorgi の予想は Savin [60] により肯定的に解かれたことを述べておく．ところで，この予想の

中で空間次元に関する仮定があるのは，$N \geq 9$ の場合には，超平面以外にも $\mathbb{R}^N$ 上グラフで表される極小曲面が存在することに起因している ([6]).

さて，$u = a$ は，(5.1) の不安定定数平衡点なので，解の値域を $[0, a]$ または $[a, 1]$ に制限すると単安定な状況の進行波解も存在する．単安定状況下での高次元進行波解，全域解については [29, 30, 34] に詳しい.

最後に，高次元の進行波解の研究としてシリンダー領域での進行波解について簡単に触れておこう．シリンダー領域 $\Omega = \{(x, y) \mid x \in D, y \in \mathbb{R}\}$ 上の反応拡散方程式 (5.1) の y 軸方向に一定速度で動く進行波解 $u(x, y, t) = w(x, y - \nu t)$ については，比較的古くから議論されている．境界条件を

$$w(x, y) = 0 \qquad (x \in \partial D)$$

とする．y 軸方向の条件として,

$$\lim_{y \to \pm\infty} w(x, y) = \phi_{\pm}(x)$$

とおくと,

$$\Delta' \phi_{\pm} + f(\phi_{\pm}) = 0$$

を満たす必要がある．D が１次元区間で区間幅がある程度以上の場合は，Gardner [24] によって進行波解の存在が証明されている．また，[64] により，D が高次元の領域の場合に拡張されている．もっと一般的な境界条件や非一様な媒体における進行波解に関しては，Berestycki-Nirenberg [5]，Heinze-Papanicolaou-Stevens[36] に詳しい.

高次元の反応拡散方程式の解の挙動は，ある極限をとると界面の運動方程式に帰着される場合が多い．上述の問題も平均曲率流と関係し，また前節の場合は外力をもつ平均曲率流と関係が深い．外力をもつ平均曲率流の運動として，[14, 50] を，界面進行波解の安定性の論文として [49] を挙げておく.

高次元の非線形偏微分方程式の解を表現する上で，今後も進行波解は重要な役割を果たすと思われる．高次元の進行波解のこれからの研究方向と課題をまとめておこう.

(i) 進行波解の一意性と漸近安定性；

(ii) 上述以外の進行波解の構成（特にシステムの場合)；

(iii) いくつかの進行波解の合成による新しい全域解の構成.

7　その他の話題

最初にも述べたが，進行波解の研究は多岐におよぶ．ここでは次の面白そうな話題を簡単に紹介しよう．

周期的な環境を考慮するとモデル方程式には周期係数が現れる．理論生物の分野で Shigesada-Kawasaki[57] は，周期的な環境に生物が侵入するとき，その速度が一様な場合と比べてどのように変化するかを調べるため，周期係数をもつ Fisher-KPP 方程式を用いて周期的な進行波解の研究を行った．彼らの研究は，数学的に厳密でなかったが，後に Xin [67, 68, 70], Berestycki 等の研究 [3, 4] によって数学的な研究へ発展している．このような周期的進行波解は，境界が周期的に変化する無限にのびた帯状領域やシリンダー領域においても生じる．実際，Nakamura [48], Matano [44] の研究がある．また [44] において概周期の場合を含む非一様な係数をもつ反応拡散方程式の進行波解の特徴付けもなされている．

ところで，前節の最後の方でも少し述べたが，双安定の反応拡散方程式の場合には特異極限として界面の運動方程式が導かれる．帯状領域における界面の運動方程式について，境界の幾何学的形状 (ノコギリ状の境界) と速度の関係を詳しく調べた興味ある結果が Matano-Nakamura-Lou [45] によって得られている．

退化型拡散をもつ方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2} + u(1-u)$$

において m が $m \geq 2$ なる整数なら，指数的に $u = 0$ に減少する進行波解のみならず，ある点以降は零となる進行波解が存在する．このような退化型の拡散方程式や，非線形項が退化する零点をもつ場合，さらに移流項がある場合などについても進行波解が研究されている．ここでは文献 [25] を挙げておく．

進行波解の新しい動向としてを変分法を使った研究がある．存在に関する研究や進行波の速度を変分的に評価する方法の提案と応用（文献 [36, 37]）があり興味深い．また，ノイズをいれた反応拡散方程式の進行波の研究もあり，応用面からのこの方面の研究は注目を浴びている ([68, 69] 参照).

8　謝辞

最後の節の文献 [25] は細野雄三氏（京都産業大学）より教わった．この場を借りて感謝の意を述べたい．細野氏は，生物の拡散モデルについて進行波解を多年に渡って研究しておられ多数の成果を上げられているが，この論説の中心的テーマではなかったのでその研究を紹介できなかったことが残念である．また，中村健一氏（電気通信大学）には論文 [45] を送って頂き感謝の意を述べたい．

参考文献

[1] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation*, Partial Differential Equations and Related Topics, ed. J. A. Goldstein, Lecture Notes in Math. **446** (1975), 5–49.

[2] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, *Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics*, Adv. Math. **30** (1978), 33–76.

[3] H. Berestycki and F. Hamel, *Front propagation in periodic excitable media*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 949–1032.

[4] H. Berestycki, F. Hamel and N. Nadirashvili, *The speed of propagation for KPP type problems I: Periodic framework*, J. Eur. Math. Soc. **7** (2005), 173–213.

[5] H. Berestycki and L. Nirenberg, *Travelling fronts in cylinders*, Ann. Inst. Henri Poincare **5** (1992), 497–572.

[6] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.

[7] M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to traveling waves*, Mem. Amer. Math. Soc. **44** (1983), no. 285.

[8] P. Brunovský and B. Fiedler, *Connecting orbits in scalar reaction-diffusion equations II: The complete solution*, J. Differential Equations **81** (1989), 106–135.

[9] X. Chen, *Existence, uniqueness, and asymptotic stability of traveling waves in nonlocal evolution equations*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 125–160.

[10] X. Chen, *Generation, propagation, and annihilation of metastable pattern*, J. Differential Equations **206** (2004), 399–437.

[11] X. Chen and J. -S. Guo, *Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction-diffusion equation*, J. Differential Equations **212** (2005), 62–84.

[12] X. Chen, J. -S. Guo and H. Ninomiya, *Entire solutions of a balanced bistable dynamics*, to appear in Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.

[13] X.F. Chen, J.S. Guo, F. Hamel, H. Ninomiya, and J.M. Roquejoffre, *Traveling Waves with Paraboloid Like Interfaces for Balanced Bistable Dynamics*, to appear in Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire.

[14] K. Deckelnick, C. M. Elliott, and G. Richardson, *Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex*, Nonlinearity **10** (1997), 655–678.

[15] U. Ebert and W. van Saarloos, *Front propagation into unstable states: universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts*, Phys. D **146** (2000), 1–99.

[16] S. Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction-diffusion systems*, J. Dynam. Differential Equations **14** (2002), 85–137.

[17] B. Fiedler, *Global attractors of one-dimensional parabolic equations: sixteen examples*, Tatra Mt. Math. Publ. **4**(1994), 67–92.

[18] B. Fiedler and C. Rocha, *Orbit equivalence of global attractors of semilinear parabolic differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 257–284.

[19] P. C. Fife and J. B. McLeod, *The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions*, Arch. Ration. Mech. Anal. **65** (1977), 335–361.

[20] P. C. Fife and J. B. McLeod, *A phase plane discussion of convergence to travelling fronts for nonlinear diffusion*, Arch. Ration. Mech. Anal. **75** (1980/81), 281–384.

[21] R. A. Fisher, *The wave of advance of advantageous genes*, Ann. Eugenics **7** (1937), 355–369.

[22] M. Freidlin, *Limit theorems for large deviations and reaction-diffusion equations*, Ann. Probab. **13** (1985), 639–675.

[23] Y. Fukao, Y. Morita, and H. Ninomiya, *Some entire solutions of the Allen-Cahn equation*, Taiwanese J. Math. **8** (2004), 15–32.

[24] R. Gardner *Existence of multidimensional traveling wave solutions of an initial-boundary value problem* J. Differential Equations **61** (1986), 335–379.

[25] B. H. Gilding and R. Kersner, Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction, Birkhäser Verlag, Basel, 2004.

[26] N. Ghoussoub and C. Gui, *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Math. Ann. **311** (1998), 481–491.

[27] J.-S. Guo and Y. Morita, *Entire solutions of reaction-diffusion equations and an application to discrete diffusive equations*, Disc. Cont. Dyn. Systems **12** (2005), 193–212.

[28] J. K. Hale, Asymptotic behavior of dissipative systems, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[29] F. Hamel and R. Monneau, *Solutions of semilinear elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with conical-shaped level sets*, Comm. Partial Diff. Equations **25** (2000), 769–819.

[30] F. Hamel and R. Monneau, *Existence and uniqueness for a free boundary problem arising in combustion theory*, Interfaces Free Boundaries **4** (2002), 167–210.

[31] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts*, Disc. Cont. Dyn. Systems **13** (2005), 1069–1096.

[32] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, *Asymptotic properties and classification of bistable fronts with Lipschitz level sets*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 75–92.

[33] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Entire solutions of the KPP equation*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1255–1276.

[34] F. Hamel and N. Nadirashvili, *Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in* $\mathbf{R}^N$, Arch. Ration. Mech. Anal. **157** (2001), 91–163.

[35] M. Haragus and A. Scheel, *Corner defects in almost planar interface propagation.* Ann. Inst. H. Poincare' Anal. Non Line'aire **23** (2006), 283–329.

[36] S. Heinze, G. Papanicolaou and A. Stevens, *Variational principles for propagation speeds in inhomogeneous media* SIAM J. Appl. Math. **62** (2001), 129–148.

[37] K.P. Hadeler and F. Rothe, *Traveling fronts in nonlinear diffusion equations*, J. Math. Biol., **2** (1975), 251–263.

[38] Y. Kametaka, *On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type*, Osaka J. Math. **13** (1976), 11–66.

[39] Ya. I. Kanel, *The behavior of solutions of the Cauchy problem when the time tends to infinity, in the case of quasilinear equations arising in the theory of combustion*, Soviet Math. Dokl. **1** (1960), 533–536.

[40] Ya. I. Kanel, *Some problems involving burning-theory equations*, Soviet Math. Dokl. **2**(1961), 48–51.

[41] 観音幸夫,「2種競合系の進行波について」, 数学, 第49巻, 第4号, 1997年, 379–392.

[42] T. Kawahara and M. Tanaka, *Interactions of traveling fronts: An exact solutions of a nonlinear diffusion equations*, Physics Letters. **97A** (1983), 311–314.

[43] A. Kolmogorov, I. Petrovsky, and N. Piskunov, *Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique*, Bjul. Moskowskogo Gos. Univ. Ser. Internat. Sec. A **1** (1937), 1–26. *Study of the diffusion with growth of the quantity of matter and its application to a biology problem*, in "Dynamics of curved fronts", ed. Pierre Pelcé, Academic Press, Boston (1988) 105–130

[44] H. Matano, *Travelling waves in spatially inhomogeneous diffusive media–the non-periodic case*, Preprint.

[45] H. Matano, K.I. Nakamura and B. Lou, *Periodic traveling waves in a two-dimensional cylinder with saw-toothed boundary and their homogenization limit*, Networks and Heterogeneous Media **1** (2006), 537–568.

[46] H. J. K. Moet, *A note on the asymptotic behavior of solutions of the KPP equation*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 728–732.

[47] Y. Morita and H. Ninomiya, *Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations*, J. Dynam. Differential Equations **18** (2006), 841–861

[48] K. -I. Nakamura, *Bounds for effective speeds of traveling fronts in spatially periodic media*, Preprint.

[49] M. Nara and M. Taniguchi, *Stability of a traveling wave in curvature flows for spatially non-decaying initial perturbations*, Disc. Cont. Dyn. Systems **14** (2006), 203–220.

[50] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Stability of traveling curved fronts in a curvature flow with driving force*, Methods and Application of Analysis **8** (2001), 429–450.

[51] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Existence and global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations,* J. Differential Equations **213** (2005), 204–233.

[52] H. Ninomiya and M. Taniguchi, *Global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations,* submitted to Disc. Cont. Dyn. Systems, **15** (2006), 819–832.

[53] 西浦廉政,「数学と化学・生物学ー自己複製と自己崩壊のダイナミクスをめぐって」, 数学, 第 52 巻, 第 4 号, 2000 年, 404–416.

[54] 西浦廉政,「散逸系における粒子パターンの複製・崩壊・散乱のダイナミクス」, 数学, 第 55 巻, 第 2 号, 2003 年, 113–127.

[55] H. Okamoto and M. Shoji, The mathematical theory of permanent progressive water-waves, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, 20. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[56] F. Rothe, *Convergence to pushed fronts*, Rocky Mountain J. Math. **11** (1981), 617–633.

[57] N. Shigesada and K. Kawasaki, Biological Invasions: Theory and Practice, Oxford Series in Ecology and Evolution, Oxford Univ. Press., Oxford (1997).

[58] J. Smoller, Shock waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[59] D. H. Sattinger, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Adv. Math. **22** (1976), 312–355.

[60] O. Savin, *Phase transitions: regularity of flat level sets*, preprint.

[61] M. Taniguchi, *Traveling fronts of pyramidal shapes in the Allen-Cahn equations*, submitted to SIAM J. Math. Anal.

[62] 戸田盛和,「非線形波動とソリトン（新版）」, 日本評論社, 2000 年.

[63] K. Uchiyama, *The behavior of solutions of some nonlinear diffusion equations for large time*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 453–508.

[64] A. I. Volpert, V. A. Volpert, V. A. Volpert, Traveling wave solutions of parabolic systems, American Mathematical Society Providence, RI, 1994.

[65] H. F. Weinberger, *Long time behavior of a class of biological models*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1978), 353–396.

[66] H. F. Weinberger, *On spreading speeds and traveling waves for growth and migration in periodic habitat*, J. Math. Biol. **45**(2002), 511–548.

[67] J. Xin, *Existence and stability of travelling waves in periodic media governed by a bistable nonlinearity*, J. Dynam. Differential Equations **3** (1991), 541–573.

[68] J. Xin, *Front propagation in heterogeneous media*, SIAM Rev. **42** (2000), 161–230.

[69] J. Xin, *KPP front speeds in random shears and the parabolic Anderson problem*, Methods Appl. Anal. **10** (2003), 191–197.

[70] J. X. Xin, *Existence of planar flame fronts in convective-diffusive periodic media*, Arch. Rat. Mech. Anal. **121** (1992), 205–233.

[71] H. Yagisita, *Backward global solutions characterizing annihilation dynamics of travelling fronts*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), 117–164.